Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik521.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik521/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik521 – Übung 12

Martin Ueding
mu@martin-ueding.de

Paul Manz

Lino Lemmer
l2@uni-bonn.de

2014-07-07

1 Thermisches Photonengas

Gegeben ist:

$$\rho(E) = \frac{VE^2}{\pi(\hbar c)^3}, \quad E(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{p}|c.$$

1.1 Großkanonisches Potential

Die Photonen interagieren nicht miteinander. Also sollte es keinen Energieunterschied ausmachen, wenn sich die Anzahl ändert. Daher ist $\mu = 0$.

Die Zustände, die wir haben, sind die verschiedenen Wellenvektoren $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$. Diese hängen mit dem Impulsen $\boldsymbol{p}$ über $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ zusammen. Als weitere Freiheitsgerade haben wir die beiden Helizitäten ± 1. Somit ist die großkanonische Zustandssumme:

$$\begin{aligned} Z_\mathrm{G} &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3} \sum_{s=\pm 1} E(\boldsymbol{k})\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3} \prod_{s=\pm 1} \exp(-\beta E(\boldsymbol{k})) \end{aligned}$$

Wir wenden die Formel für den Grenzwert der geometrischen Reihe an. Außerdem führen wir das Produkt über die beiden Helizitäten aus.

$$\begin{aligned} &= \left(\prod_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3} \frac{1}{1-\exp(-\beta E(\boldsymbol{k}))}\right)^2 \\ &=: \left(\prod_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3} \tilde{Z}_\mathrm{G}\right)^2 \end{aligned}$$

Daraus bestimmen wir jetzt das großkanonische Potential:

$$\begin{aligned} \Omega &= -k_\mathrm{B} T \ln(Z_\mathrm{G}) \\ &= -2k_\mathrm{B} T \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}^3} \ln(\tilde{Z}_\mathrm{G}(\boldsymbol{k})) \end{aligned}$$

An dieser Stelle müssen wir die Summe in ein Integral umschreiben, um weiter rechnen zu können. Die Wellenzahlzustände (Impulszustände) sind aufgrund der am Volumenrand verschwindenden Wellenfunktion quantisiert. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass das Volumen ein Würfel mit Kantenlänge l ist. Es gibt eine kleinste Wellenzahl k_0, die durch $2\pi/l$ gegeben ist. Alle höheren Wellenzahlen sind Vielfache davon. Somit schreiben wir die Summe in einer Dimension um als $\sum_{k_x \in \mathbb{R}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_0 n$. Aus der Summe über n können wir nun ein Integral $\int \mathrm{d}n$ machen, da l so groß ist, dass n quasidicht in $\mathbb{R}$ liegt. Mit $\mathrm{d}n = \mathrm{d}kl/(2\pi)$ erhalten wir einen Vorfaktor $V/(2\pi)^3$ vor dem Integral, wenn wir die Summe in allen drei Dimensionen in ein Integral umwandeln.

$$= -2k_\mathrm{B} T \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 k \, \ln(\tilde{Z}_\mathrm{G}(\boldsymbol{k}))$$

Um die normale Darstellung mit $\boldsymbol{p}$ zu erhalten, substituieren wir erneut.

$$= -2k_\mathrm{B} T \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 p \, \ln\left(\frac{1}{1 - \exp(-\beta|\boldsymbol{p}|c)}\right)$$
$$= 2k_\mathrm{B} T \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 p \, \ln\big(1 - \exp(-\beta|\boldsymbol{p}|c)\big)$$

Da wir nur am Betrag von $\boldsymbol{p}$ interessiert sind, wählen wir Kugelkoordinaten.

$$= 2\frac{4\pi k_\mathrm{B} T V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p \, p^2 \ln\big(1 - \exp(-\beta pc)\big)$$

Nun substituieren wir, damit wir den Tipp auf dem Aufgabenblatt anwenden können, $x := \beta pc$.

$$= 2\frac{4\pi k_\mathrm{B} T V}{(2\pi\hbar)^3 (\beta c)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}x \, x^2 \ln\big(1 - \exp(-x)\big)$$

Das verbleibende Integral ist laut Tipp $-\pi^4/45$.

$$= -\frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4 V}{45(\hbar c)^3} T^4$$

Dies stimmt mit dem Kontrollergebnis überein.

1.2 Mittlere Photonenzahl

Die Anzahl der Teilchen ist die Summe der Besetzungszahlen der Zustände. So ist im Skript als Formel (5.136) angegeben:

$$N = \sum_\alpha b(E_\alpha).$$

Dort wird aber über die Zustände α summiert. Wir möchten lieber über die Energien summieren und gebrauchen daher die schon gegebene Zustandsdichte:

$$
\begin{aligned}
N &= \int \mathrm{d}E\, \rho(E) b(E) \\
&= \mathrm{d}E \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \frac{1}{\exp(-\beta E) - 1}
\end{aligned}
$$

Hier können wir das Integral auf dem Aufgabenblatt benutzen, wenn wir $x := \beta E$ setzen.

$$
\begin{aligned}
&= V \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\hbar c} \right)^3 \int \mathrm{d}x\, x^2 \frac{1}{\exp(-x) - 1} \\
&\approx 0{,}244 \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\hbar c} \right)^3 V
\end{aligned}
$$

Auch dies stimmt mit dem Kontrollergebnis überein.

1.3 Entropie und innere Energie

Entropie:

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial \Omega}{\partial T} \\
&= \frac{4\pi^2 k_\mathrm{B}^4 V}{45 \hbar^3 c^3} T^3
\end{aligned}
$$

Innere Energie:

$$
U = \omega + TS = (4+1) \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4 V}{45 \hbar^3 c^3} T^4
$$

Da $\Omega = U - TS - \mu N$ sowie $F = U - TS$ ist, sind diese beiden Potentiale identisch, sobald $\mu = 0$ ist.

1.4 Druck

Es gilt:

$$
\mathrm{d}\Omega = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V - N\,\mathrm{d}\mu
$$

Daher:

$$
p = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V} \right)_{T,\mu} = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4}{45 \hbar^3 c^3} T^4
$$

Der Druck hängt nicht vom Volumen ab. Der Strahlungsdruck steigt also nicht direkt durch alleinige Verringerung des Volumens. Dies liegt daran, dass die Photonen nicht wechselwirken.

1.5 Adiabatische Zustandsgleichungen

Moment! Adiabatisch bedeutet $\delta Q = 0$. $\mathrm{d}S = 0$ bedeutet reversibel. Wir gehen hier davon aus, dass $\mathrm{d}S = 0$ das entscheidende ist.

Nach „Einführung in die Extragalaktische Astronomie“ erwarten wir, dass die Energiedichte mit einer Längenskala l in der Form l^{-4} skaliert.

$$\begin{aligned}
S &= \frac{4\pi^2 k_\mathrm{B}^4 V}{45\hbar^3 c^3} T^3 \\
\mathrm{d}S &= \frac{4\pi^2 k_\mathrm{B}^4}{45\hbar^3 c^3} (\mathrm{d}V\, T^3 + 3VT^2\, \mathrm{d}T) \stackrel{!}{=} 0 \\
\iff 0 &= \mathrm{d}V\, T + 3V\, \mathrm{d}T
\end{aligned}$$

N hängt ebenfalls von VT^3 ab, hat also ein totales Differential $\mathrm{d}N$, das proportional zu $\mathrm{d}S$ ist. Somit ist $\mathrm{d}N = 0$ und die Teilchenzahl erhalten.

Wenn N eine Konstante ist, dann kann man daraus $T(V)$ erhalten, in dem man $N(T, V)$ umstellt:

$$T(V) = \frac{\hbar c}{k_\mathrm{B}} \sqrt[3]{\frac{N}{0{,}244 V}}.$$

Die Temperatur nimmt also mit dem Volumen ab. Die Energie hängt von der Temperatur und dem Volumen mit $U \propto VT^4$ ab. Somit die Energiedichte $\rho_U \propto V^{-3/4} = l^{-4}$. Dies stimmt mit der Friedmann-Gleichung überein.

Für den Druck setzen wir $T(V)$ ein und erhalten $p(V)$:

$$p = \frac{\pi^2 k_\mathrm{B}^4}{45\hbar^3 c^3} T^4$$

2 Klassisches Gas in einem harmonischen Potential

2.1 Kanonische Zustandssumme

$$\begin{aligned}
Z_\mathrm{C} &= \sum_{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{x}_1} \cdots \sum_{\boldsymbol{p}_N, \boldsymbol{x}_N} \exp(-\beta H) \\
&= \left(\sum_{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}} \exp(-\beta H) \right)^N \\
&= \left(\frac{V}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 p \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 x \, \exp\left(-\beta \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \kappa \boldsymbol{x}^2 \right) \right) \right)^N
\end{aligned}$$

Wir benutzen wieder Kugelkoordinaten.

$$= \left(\frac{16\pi^2 V}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^\infty \mathrm{d}p \int_0^\infty \mathrm{d}x\, p^2 x^2 \exp\left(-\beta \left(\frac{p^2}{2m} + \kappa x^2 \right) \right) \right)^N$$

Ein derartiges Integral hatten wir schon auf einem vorherigen Aufgabenzettel. Wir haben dieses jetzt mit Mathematica gelöst.

$$= \left(\frac{V}{\sqrt{8}\hbar^3 \beta^3} \left(\frac{m}{\kappa} \right)^{3/2} \right)^N$$

Daraus bestimmen wie die freie Energie zu:

$$F = -k_\mathrm{B} T N \ln \left(\frac{V}{\sqrt{8}\hbar^3 \beta^3} \left(\frac{m}{\kappa} \right)^{3/2} \right)$$

2.2 Mittlerer Quadratischer Radius

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{Z_\mathrm{C}} \sum_\alpha \exp(-\beta H) x^2$$

Somit ändert sich das Integral, das wir in der vorherigen Aufgabe ausgerechnet haben, nur durch den weiteren Faktor x^2. Und natürlich wird Z_C herausgeteilt. Mathematica liefert uns den Ausdruck:

$$R = \frac{3}{2} \frac{k_\mathrm{B} T}{\kappa}.$$

Von den Einheiten stimmt dies auch.

Das Volumen nehmen wir als Kugelförmig an, wodurch wir erhalten:

$$V = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{3}{2} \frac{k_\mathrm{B} T}{\kappa} \right)^{3/2}.$$

2.3 Zustandssumme und freie Energie als Funktion von N, V und T

Da wir die Integrale in den vorherigen Aufgabenteilen schon ausgerechnet haben, brauchen wir in dieser Aufgabe nichts mehr tun.

2.4 Druck

Allgemein gilt:

$$F = -pV + \mu N \iff p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{N,T}$$

Hier ist:

$$F = -k_\mathrm{B} T N \ln\left(\frac{V}{\sqrt{8}(\hbar\beta)^3} \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{3/2} \right)$$

Nach Vereinfachungen erhalten wir für den Druck:

$$p(N, V, T) = \frac{k_\mathrm{B} T N}{V}$$

Dies ist allerdings nur eine Funktion, wir wissen nicht, wie wir daraus eine Zustands*gleichung* erhalten.

$p(V)$ ist eine einfache Hyperbel. Wie kann sich denn V ändern, wenn N und T konstant gehalten werden? Ändern sich dann m oder κ?