Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik521.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik521/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik521 – Übung 9

Martin Ueding
mu@martin-ueding.de
Paul Manz
Lino Lemmer

2014-07-07

1 Das ideale Fermi-Gas

Wir übernehmen folgende Formeln aus dem Skript:

$$Z_{\mathrm{G}} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \exp\left(-\frac{E_{\alpha_i} - \mu}{k_{\mathrm{B}} T} \right) \right)$$

$$\Omega = -k_{\mathrm{B}} T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(Z_{\mathrm{G},1}(\alpha_i, \mu, T) \right)$$

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta(E - E_{\alpha_i})$$

Alle diese Aufgaben stehen so im Skript vorgerechnet. Wir haben uns bei unseren Rechnungen an das Skript gehalten, jedoch wieder versucht jeden Schritt hier zur erklären.

1.1 Allgemeine Ausdrücke

1.1.1 Mittlere Teilchenzahl

Die Funktion $f(E_{\alpha_i})$ gibt die Anzahl der Besetzungen des Zustandes α_i an. Somit wie im Skript:

$$\langle N \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i}).$$

Wenn man jetzt ρ dazunimmt, geht dies so:

$$\langle N \rangle = \int \mathrm{d}E \, \rho(E) f(E).$$

Dies funktioniert, da ρ im Integral über E an jedem Energiewert E die Anzahl der Zustände α_i, die diese Energie haben, gibt. Somit wird die Vielfachheit der Energiezustände von der Summe in das ρ verlagert.

1.1.2 Entropie

Mit $\Omega = U - TS - \mu N$ kann man die Entropie S als Ableitung schreiben:

$$S = -\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{\mu,V}.$$

Diese rechnen wir jetzt konkret aus:

$$\begin{aligned}
S &= k_\mathrm{B} \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(-\frac{E_{\alpha_i} - \mu}{k_\mathrm{B} T}\right) + k_\mathrm{B} T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{k_\mathrm{B}T}\right)} \frac{E_{\alpha_i} - \mu}{k_\mathrm{B} T^2} \\
&= -\frac{\Omega}{T} + \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i}) \frac{E_{\alpha_i} - \mu}{T}.
\end{aligned}$$

1.1.3 Innere Energie

Mit der am Anfang der vorherigen Teilaufgabe genannten Relation können wir die innere Energie als $U = \Omega + TS + \mu N$ schreiben. Wir rechnen weiter:

$$\begin{aligned}
U &= \Omega + TS + \mu N \\
&= \Omega - \Omega + \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i}) \cdot (E_{\alpha_i} - \mu) + \mu N \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i}) \cdot E_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i}) \cdot E_{\alpha_i} + \mu N \\
&= \langle E \rangle - \langle N \rangle \mu + \mu N.
\end{aligned}$$

Wenn man das Limit $N \to \infty$ annimmt, kann man $\lim_{N\to\infty} \langle N \rangle = N$ annehmen und weiter vereinfachen:

$$= \langle E \rangle.$$

1.1.4 Freie Energie

Die freie Energie F ist wieder ein transformiertes Potential, wir benutzen hier $F = \Omega + \mu N$. Dabei sehen wir jedoch nicht, wie sich dies weiter vereinfacht.

1.2 Druck des Gases

Im Skript wird folgendes vorgerechnet. In Formel (5.47) ist das großkanonische Potential gegeben:

$$\Omega = -k_\mathrm{B} T \sum_{\sigma} \mathrm{d}E_\alpha \rho_\sigma(E_\alpha) \ln\left(1 + \exp\left(-\frac{E_\alpha - \mu}{k_\mathrm{B} T}\right)\right).$$

Dabei stehen die σ wahrscheinlich für alle Spins, über die Summiert wird. Allerdings ist der Index α frei, sollte aber wegsummiert werden, da er auf der linken Seite nicht steht. Fehlt somit noch eine Summe über α, oder bezieht die Summe über die σ dies noch ein?

In Formel (5.28) ist die Zustandsdichte pro Volumen gegeben:

$$\frac{\rho_\sigma(E)}{V} = \frac{3}{4} n \frac{1}{\epsilon_\mathrm{F}} \sqrt{\frac{E}{\epsilon_\mathrm{F}}}.$$

Wenn man dies jetzt nach ρ_σ umstellt und in die obige Formel für Ω einsetzt, und noch annimmt, dass die Abhängigkeit vom Volumen jetzt alleine in dem V steckt, das durch die Umformung entstanden ist, führt eine Ableitung nach V nur dazu, dass dieses V wieder verschwindet. Somit erhalten wir das in Skript gegebene Ergebnis von:

$$p = -\frac{\partial \omega}{\partial V} = -\frac{\Omega}{V}.$$

Jetzt haben wir dabei wohl angenommen, dass die Teilchendichte $n = N/V$ konstant bleibt, weil ρ_σ/V diese enthält und wir nur so diese proportionale Volumenabhängigkeit erhalten. Allerdings wurde das μ in der Darstellung von Ω als konstant angenommen, damit die Ableitung derart einfach ist.

Von daher scheint die Herleitung im Skript beide Annahmen gemacht zu haben.

1.2.1 Bei festem chemischen Potential

Hier fehlen noch Inhalte.

1.2.2 Bei fester Teilchenzahl

Hier fehlen noch Inhalte.

1.2.3 Diskussion

Hier fehlen noch Inhalte.

1.3 Spezifische Wärme

Die Definition der spezifischen Wärme ist:

$$c_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V.$$

Hier ist die Variante mit

$$c_V = -T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,\mu}$$

nützlich. Dort setzen wir jetzt die Entropie, die wir vorher berechnet haben, ein:

$$
\begin{aligned}
c_V &= -T\left[\frac{\Omega}{T^2} - \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i})\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{T^2} - \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} - \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f(E_{\alpha_i})}{\partial T}\right)_{V,\mu}\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{T}\right] \\
&= -\frac{\Omega}{T} + \sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i})\frac{E_{\alpha_i}-\mu}{T} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{V,\mu} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f(E_{\alpha_i})}{\partial T}\right)_{V,\mu}(E_{\alpha_i}-\mu).
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Summanden sind gerade die Entropie. Der dritte Summand ist $-S$. Somit erhalten wir:

$$
= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\partial f(E_{\alpha_i})}{\partial T}\right)_{V,\mu}(E_{\alpha_i}-\mu).
$$

Wir ziehen die Ableitung nach vorne, da die restlichen Größen als unabhängig von der Temperatur angenommen werden.

$$
= \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_{V,\mu}\sum_{i=1}^{\infty} f(E_{\alpha_i})\cdot(E_{\alpha_i}-\mu)
$$

Es bleibt der Mittelwert von $E_{\alpha_i}-\mu$ übrig. Somit schreiben wir:

$$
= \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_{V,\mu}\langle E_{\alpha_i}-\mu\rangle
$$

Dies ist der Mittelwert der Abweichung der Energiewerte vom chemischen Potential. In der zeitlichen Ableitung spielt μ jedoch keine Rolle mehr, da es als konstant angenommen wird. Somit ist es nur der Mittelwert der Energie.

$$
= \left(\frac{\partial \langle E_{\alpha_i}\rangle}{\partial T}\right)_{V,\mu}
$$

Dies identifizieren wir mit der inneren Energie:

$$
= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,\mu}.
$$

1.4 Tieftemperaturentwicklung

Für die weiteren Teilaufgaben muss das großkanonische Potential genähert werden. Dabei wird ausgenutzt, dass bei kleinen Temperaturen die Fermiverteilung jenseits des chemischen Potentials annähernd konstant ist.

1.4.1 Mittlere Teilchenzahl

$$N = 2 \int \mathrm{d}E\, \rho(E) f(E)$$

Nun führen wir eine partielle Integration durch, um die Ableitung der Fermiverteilung zu erhalten. Dazu müssen wir dann eine Funktion

$$b(E) := \int_{-\infty}^{E} \mathrm{d}E'\, \rho(E')$$

einführen, die die Stammfunktion zu ρ ist.

$$= 2\, b(E) f(E) \Big|_{E=-\infty}^{\infty} - 2 \int \mathrm{d}E\, b(E) f'(E)$$

Der erste Summand verschwindet, da $b(-\infty)$ per Definition verschwindet. $f(\infty)$ verschwindet auch, da große Energien immer weniger dicht besetzt sind.

$$= -2 \int \mathrm{d}E\, b(E) f'(E)$$

Da $f'(E)$ an einer recht schmalen Stelle bei $E = \mu$ von null verschieden ist, und b innerhalb des relevanten Intervalls nicht stark variiert, kann es durch eine Taylorentwicklung angenähert werden. Diese ist:

$$b(E) = b(\mu) + b'(\mu)(E-\mu) + \frac{1}{2} b''(\mu)(E-\mu)^2 + \mathcal{O}(E^3).$$

Wir setzen diese Entwicklung für b ein und erhalten:

$$= -2b(\mu) \int \mathrm{d}E\, f'(E) - 2b'(\mu) \int \mathrm{d}E\, (E-\mu) f'(E) - b''(\mu) \int \mathrm{d}E\, (E-\mu)^2 f'(E).$$

Im Skript sind die Lösungen zu diesen sogenannten Fermiintegralen angeben. Diese setzen wir hier ein.

$$= 2b(\mu) + p'(\mu) \frac{\pi^2}{3} (k_\mathrm{B} T)^2$$

$b(\mu)$ ist die Anzahl der Zustände, die bis zum chemischen Potential besetzt sind.

1.4.2 Entropie

Im Skript wird eine analoge Näherung des kanonischen Potentials gemacht. Da im kanonischen Potential zuerst der Logarithmus der Zustandssumme steht, braucht man eine weitere partielle Integration, um die Ableitung der Fermiverteilung zu erhalten. Der Ausdruck ist gegeben als:

$$\Omega = -2b(\mu) - \frac{\pi^2}{3} p(\mu) (k_\mathrm{B} T)^2 + \mathcal{O}(T^4).$$

Die Entropie ist die negative Ableitung nach der Temperatur, also:

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{2}{3}\pi^2 \rho(\mu) k_{\mathrm{B}}^2 T.$$

1.4.3 Innere Energie

Die innere Energie ist $U = \Omega + TS + \mu N$. Mit den Ergebnissen der vorherigen Teilaufgaben:

$$U = -2b(\mu) + \frac{\pi^2}{3}\rho(\mu)(k_{\mathrm{B}}T)^2 + \mu N.$$

Wenn man $b(\mu) = N$ annimmt, das allerdings nicht exakt sein kann, weil wir in der vorherigen Aufgabe etwas anderes für $\langle N \rangle$ erhalten haben, könnte man dies vielleicht noch weiter vereinfachen.

1.4.4 Freie Energie

Die freie Energie ist, wie zuvor auch, $\Omega + \mu N$ und lässt sich nicht sonderlich vereinfachen.

1.4.5 Druck

Der Druck ist weiterhin

$$p = -\frac{\partial \Omega}{\partial V},$$

wobei das Ω jetzt das genäherte ist. Da $\rho(\omega)$ wieder proportional von V ist und der erste Summand in Ω gar nicht von V abhängt, ist der Druck gegeben durch:

$$p = \frac{\pi^2}{6}\frac{\rho(\mu)}{V}(k_{\mathrm{B}}T)^2.$$

2 Modell für weiße Zwerge

2.1 Fermiimpuls

Für ein ideales Fermigas gilt die Gleichung

$$\langle N \rangle = \int \mathrm{d}E \; \rho(E) f_\mu(E)$$

Wir wissen, dass bei $T = 0$ alle Zustände bis zur Fermienergie besetzt sind. Um diese und damit den Fermiimpuls zu erhalten brauchen wir die Gleichung lediglich bei $T = 0 \implies f_\mu = \Theta(\epsilon_\mathrm{F})$ auszuwerten.

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} \mathrm{d}E\ \rho(E) \\
&= \int_0^{\epsilon_\mathrm{F}} \mathrm{d}E\ \frac{VE\sqrt{E^2-(mc^2)^2}}{2\pi^2\hbar^3c^3} \\
&= \frac{V}{2\pi^2\hbar^3c^3}\int_0^{p_\mathrm{F}} \mathrm{d}p\ \frac{Ep^2c^3}{2E} \\
&= \frac{V}{4\pi^2\hbar^3c}\int_0^{p_\mathrm{F}} \mathrm{d}p\ p^2 \\
&= \frac{Vp_\mathrm{F}^3}{12\pi^2\hbar^3} \\
\implies p_\mathrm{F} &= \hbar\ \sqrt[3]{12\pi^2 n}
\end{aligned}$$

Damit Elektronen sich an der Fermikante relativistisch bewegen muss $p_\mathrm{F} > mc$ gelten:

$$\begin{aligned}
p_\mathrm{F} &> mc \\
\implies \hbar\ \sqrt[3]{12\pi^2 n} &> mc \\
\implies n &> \frac{(mc)^3}{12\pi^2\hbar^3} \\
n &> 1{,}49 \times 10^{29}\,\mathrm{cm}^{-3}
\end{aligned}$$

2.2 Temperatur

Berechne die Fermienergie mithilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung.

$$\begin{aligned}
\epsilon_\mathrm{F} &= c\sqrt{m^2c^2 + p_\mathrm{F}^2} \\
&= c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2(12\pi^2 n)^{2/3}} \\
&= 1{,}75 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Für $k_\mathrm{B}T$ erhalten wir:

$$k_\mathrm{B}T = 1{,}38 \times 10^{-16}\,\mathrm{J} \ll \epsilon_\mathrm{F}$$

2.3 Innere Energie