Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik521.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik521/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik521: Übungsblatt 04

Lino Lemmer — s6lilemm@uni-bonn.de
Martin Ueding — mu@martin-ueding.de
Paul Manz — p.m@uni-bonn.de

7. Juli 2014

H 4.1. Thermodynamische Relationen

H 4.2. Zentraler Grenzwertsatz

H 4.2.a.

Mit der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $(x_1, \dots, x_N)$ ist die Wahrscheinlichkeit gemeint, mit der bei N Ereignissen gerade diese in gerade dieser Reihenfolge herauskommen? Dies ist dann:

$$\prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

Bei der Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes y kommt es auf die Reihenfolge der x_i nicht an. Daher können wir mit $N!$ multiplizieren, um alle möglichen Permutationen zusammenzufassen.

Je nach der Struktur der Menge M könnte es auch sein, dass verschiedene Ergebnismengen $\{x_i \colon i = [1, N] \cap \mathbb{N}\}$ zum gleichen y führen, aber das kann man nicht genau sagen.

Also erhalten wir:

$$P_N(y) = \frac{N!}{N} \prod_{i=1}^{N} p(x_i)$$

H 4.2.b. Charakteristische Funktion

Wir nehmen die Definition der charakteristischen Funktion und setzen unser P_N dort ein:

$$X_N(k) = \int \exp\left(\mathrm{i}k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle) \right) \frac{N!}{N} \prod_{i=1}^{N} p(x_i) \, \mathrm{d}x_i$$

Die Summe im Exponenten kann man in ein Produkt von Exponentialfunktionen schreiben.

$$= \frac{N!}{N} \prod_{i=1}^{N} \underbrace{\int \exp\left(\mathrm{i}k \frac{1}{N} (x_i - \langle x \rangle) \right) p(x_i) \, \mathrm{d}x_i}_{\chi\left(\frac{k}{N}\right)}$$

Produkte gleicher Faktoren sind Potenzen.

$$= \frac{N!}{N} \left(\chi\left(\frac{k}{N}\right)\right)^N$$

Dies stimmt bis auf unseren Vorfaktor auch mit dem Ergebnis überein, das wir erhalten sollten.

H 4.2.c. Grenzfall $N \to \infty$

Wir rechnen mit dem gegebenen Ergebnis weiter:

$$\begin{aligned} X_N(k) &= \left(\chi\left(\frac{k}{N}\right)\right)^N \\ &= \exp\left(N \log\left(\chi\left(\frac{k}{N}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Taylorentwicklung von $\log(\chi)$ um $\frac{k}{N} = 0$:

$$\begin{aligned} \log\left(\chi\left(\frac{k}{N}\right)\right) &= \log\left(\int \mathrm{d}y \exp\left(\mathrm{i}\frac{k}{N}\left(y - \langle y\rangle\right)\right) P_N(y)\right) \\ &= \log\left(\int \mathrm{d}y\, P_N(y)\right) + \frac{P_N(y)}{\left(\int \mathrm{d}y P_N(y)\right)} \frac{k}{N} + \dots \end{aligned}$$