

Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik521.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik521/ gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik521: Übungsblatt 03

Lino Lemmer

s6lilemm@uni-bonn.de

Martin Ueding

mu@martin-ueding.de

Paul Manz

p.m@uni-bonn.de

7. Juli 2014

H3.1. Thermodynamische Beziehungen in einem magnetischen System

H3.1.a. Erste Herleitung

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\frac{c_B}{c_M} = \frac{\chi_T}{\chi_S}$$

Im Skript ab Seite 42 ist diese Aufgabe für zwei andere Größen vorgerechnet. Ich habe diese Lösung versucht nachzuvollziehen und hier mit mehr Erklärungen für die magnetischen Größen wiederzugeben.

Hier sind alle Umformungen, die Erklärungen folgen:

$$\frac{c_B}{c_M} \stackrel{1}{=} \frac{T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B}{T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M} \stackrel{2}{=} \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_S}{\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_S} = \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_S}{\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_S} \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_T}{\left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)_T} \stackrel{3}{=} \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_S}{\left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)_T} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial M} \right)_S}{\left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T} \stackrel{4}{=} \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_S}{\left(\frac{\partial B}{\partial M} \right)_T} \stackrel{1}{=} \frac{\chi_T}{\chi_S}$$

1. Dies gilt nach Aufgabenstellung.
2. Wir sehen B als Funktion von S und T an und erhalten somit

$$0 = dB = \left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)_T dS + \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_S dT,$$

welches wir, unter Benutzung des Kehrwertes der Ableitungen und der Kettenregel, zu

$$\frac{dS}{dT} = - \frac{\left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_S}{\left(\frac{\partial B}{\partial S} \right)_T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B$$

umstellen können.

Analog können wir auch herleiten, dass gilt:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_M = -\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_S}{\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_T}$$

3. Hier nutzen wir aus, dass der Kehrwert einer solchen partiellen Ableitung die Differenzierung umkehrt.
4. An dieser Stelle benutzen wir die Kettenregel

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \delta}\right)_\gamma = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}\right)_\gamma \left(\frac{\partial \beta}{\partial \delta}\right)_\gamma$$

im Zähler und Nenner jeweils um die Zwischenvariable S zu eliminieren.

H3.1.b. Zweite Herleitung

Diese Aufgabe wird so komplett ab Seite 42 im Skript vorgerechnet. Hier werden wir die Rechnungen aus dem Skript reproduzieren und versuchen, sie ausführlicher als im Skript zu erläutern, damit es auch etwas zur Übung beiträgt.

Nach Skript folgt können c_p und c_v durch partielle Ableitungen von S ausgedrückt werden:

$$c_p - c_v = T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v \right)$$

Wir beginnen damit, die erste Ableitung anders auszudrücken. Dazu interpretieren wir S nicht als $S(T, V, p)$, sondern als $S(T, V(p, T))$. Wenn wir jetzt nach T ableiten, erhalten wir zwei Terme durch die mehrdimensionale Kettenregel. Jedoch würden wir in dieser Stelle eigentlich erwarten, dass die partielle Ableitung von S nach T nicht Term mit S nach V enthält, da nur partiell und nicht total nach T abgeleitet wird. Jedoch wurde dies schon an einigen Stellen so gemacht und scheint auch richtig zu sein. Wir wissen nur noch nicht, warum dies so ist.

$$\begin{aligned} &= T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_v \right) \\ &= T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \end{aligned}$$

Der letzte Faktor beschreibt gerade die isobare Expansion. Diese wird durch den Expansionskoeffizienten α_p ausgedrückt, der wie folgt definiert ist:

$$\alpha_p := \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Somit erhalten wir:

$$= T \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T V \alpha_p$$

Nun müssen wir die freie Energie F benutzen. Damit können wir die Ableitung S nach V ausdrücken. Es gilt:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V.$$

Dies leiten wir nun nach dem Volumen V ab, wobei wir die Temperatur T festhalten:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V.$$

Damit erhalten wir:

$$= -T \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V V\alpha_p$$

Da F ein exaktes Differential hat, kommutieren die partiellen Ableitungen hier.

$$= -T \left(\frac{\partial}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T V\alpha_p$$

Die partielle Ableitung der freien Energie nach dem Volumen ist gerade der negative Druck.

$$= T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V V\alpha_p$$

Mit der Annahme, dass $dV = 0$ ist, können wir noch das Differential von $V(p, T)$ schreiben als:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT = 0.$$

Mit dem gleichen Trick aus der vorherigen Aufgabe kann damit nach dp/dT umgestellt werden. Da wir $dV = 0$ angesetzt hatten, müssen wir jetzt V festhalten. Warum wir dies jetzt als partielle Ableitung schreiben können, ist uns noch nicht ganz klar. Jedenfalls erhalten wir dann:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}.$$

Dies setzen wir ein.

$$= -T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} V\alpha_p$$

Im Zähler steht wieder der Ausdehnungskoeffizient α_p . Im Nenner steht die isotherme Kompressibilität, die angibt, wie sich das Volumen mit dem Druck verändert. Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} &= -T \frac{V\alpha_p}{-V\kappa_T} V\alpha_p \\ &= TV \frac{\alpha_p^2}{\kappa_T} \end{aligned}$$

Damit ist die Relation gezeigt.

H3.1.c. Dritte Herleitung

Nun das gleiche für c_B und c_M . Wir nehmen die Herleitung aus der vorherigen Aufgabe und ersetzen die Größen, lassen aber die Erklärungen jetzt weg. $p \mapsto B$, $V \mapsto M$.

$$\begin{aligned}
 c_B - c_M &= T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_B - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M \right) \\
 &= T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M + \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B - \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_M \right) \\
 &= T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B \\
 &= T \left(\frac{\partial S}{\partial M} \right)_T \alpha_B \\
 &= -T \left(\frac{\partial}{\partial M} \right)_T \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_M \alpha_p \\
 &= -T \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_M \left(\frac{\partial F}{\partial M} \right)_T \alpha_p \\
 &= T \left(\frac{\partial B}{\partial T} \right)_M \alpha_B \\
 &= -T \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial T} \right)_B}{\left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T} \alpha_B \\
 &= -T \frac{\alpha_B}{-\kappa_T} \alpha_B \\
 &= T \frac{\alpha_B^2}{\kappa_T}
 \end{aligned}$$

H3.2. Joule-Thomson-Effekt

H3.2.a. Enthalpie und Irreversibilität

Stelle zunächst fest, dass Teilchenzahl und Wärmeenergie unverändert bleiben, da wir einen adiabatischen Prozess in einem abgeschlossenen System betrachten.

$$dN = 0$$

$$\delta Q = 0$$

Der erste Hauptsatz führt dann auf:

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_2 - U_1 \\ &= \Delta W \\ &= - \int_{V_1}^0 p_1 dV + \int_0^{V_2} p_2 dV \\ &= p_1 V_1 - p_2 V_2\end{aligned}$$

Für die Enthalpie gilt also:

$$\begin{aligned}H &= U + pV \\ \Rightarrow \Delta H &= U_1 + p_1 V_1 - (U_2 + p_2 V_2) = 0\end{aligned}$$

Aus der Definition der Enthalpie folgt:

$$\begin{aligned}dH &= T dS + V dP + \mu dN = 0 \\ \Leftrightarrow T dS &= V dP > 0 = \delta Q\end{aligned}$$

Der Prozess läuft also irreversibel ab.

H 3.2.b. Joule-Thomson-Koeffizient

Der Joule-Thomson-Koeffizient ist definiert als:

$$\delta = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

Wir wissen:

$$\begin{aligned}dH &= T dS + V dp + \mu dN \\ S(T, p, N) &\Rightarrow dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,N} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} dp\end{aligned}$$

Verwende $dN = 0$ und setze ein:

$$\begin{aligned}dH &= T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{p,N} dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} dp + V dp \\ dH &= C_p dT + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} dp + V dp \\ 0 &= C_p \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} + V \\ 0 &= C_p \delta + T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} + V \\ \delta &= \frac{1}{C_p} \left(-T \left(\frac{\partial S}{\partial p} \right)_{T,N} - V \right)\end{aligned}$$

Wir müssen noch eine Maxwell-Relation aus der Gibbs freien Energie herleiten:

$$\begin{aligned}
 dG &= -S dT + V dp + \mu dN \\
 \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P,N} &= -S \\
 \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_{T,N} &= V \\
 \Rightarrow -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} &= \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}
 \end{aligned}$$

Eingesetzt führt das auf das Endergebnis

$$\delta = \frac{1}{C_p} \left(T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P,N} - V \right)$$

Für das ideale Gas gilt:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{Nk_B T}{p} \\
 \Rightarrow T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{N,P} - V &= \frac{Nk_B T}{p} - \frac{Nk_B T}{p} = 0 \\
 \Rightarrow \delta &= 0
 \end{aligned}$$

H3.2.c. Joule Kreisprozess

H3.3. Elastischer Draht

H3.3.a.

Der Draht habe eine konstante Querschnittsfläche A . Dann gilt für die Länge des Drahtes $L = \frac{V}{A}$ und für die Kraft $K = Ap$. Für das Differential der inneren Energie $U(S, L)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
 dU &= \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_L dS + \left(\frac{\partial U}{\partial L}\right)_S dL \\
 &= T dS + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)_S \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dL \\
 &= T dS - \frac{p}{A} dL \\
 &= T dS - K dL
 \end{aligned}$$

Wir wollen nun ein thermodynamisches Potential $M(L, T)$ einführen. Führe Legendre-Trafo durch:

$$\begin{aligned}
 M(L, T) &:= U(S, L) - S \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_L \\
 &= U - TS \\
 dM &= T dS - K dL - T dS - S dT \\
 &= -F dL - S dT
 \end{aligned}$$

Dieses Potential können wir zur Herleitung folgender Maxwell-Relation benutzen:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial M}{\partial L}\right)_T &= -K \\ \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_L &= -S \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial K}{\partial T}\right)_L &= \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T\end{aligned}$$

H3.3.b.

Aufgrund der Homogenität des Drahtes und der Tatsache, dass S , L und U extensive Größen sind folgt:

$$S(\lambda U, \lambda L) = \lambda S(U, L)$$

Differenziation nach λ für $\lambda \rightarrow 1$ ergibt dann:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}(\lambda S) &= S = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_L U + \left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_U L \\ &= \frac{U}{T} + FL\end{aligned}$$