Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik521.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik521/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik521: Übungsblatt 01

Lino Lemmer Martin Ueding

mu@martin-ueding.de

7. Juli 2014

H 1.2. Maxwell Relationen und Ableitungsregeln

H 1.2.a.

Die Funktionen u und v sind gegeben als:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Nach dem Satz von Schwarz kommutieren die partiellen Ableitungen für total differenzierbare Funktionen f, so dass die Maxwellrelation gilt.

H 1.3. Wahrscheinlichkeitstheorie

H 1.3.a. Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der geraden Augenzahlen}$$

H 1.3.b. Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist

$$\begin{aligned} P_X(0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ P_X(1) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ P_X(2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \sum P_X &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 \end{aligned}$$

H 1.3.c. Mittelwert

Der Mittelwert zur Zufallsvariable X ist

$$\langle X \rangle = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

H 1.3.d. Schwankungsquadrat

Das Schwankungsquadrat von X ist

$$\begin{aligned}\Delta X &= \sqrt{\left\langle (X-1)^2 \right\rangle} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

H 1.3.e. Korrelationsfunktion

H 1.3.e.1. Würfel

Ich berechne zunächst die Mittelwerte für den Würfel

$$\begin{aligned}\left\langle X_1^1 \right\rangle &= \left\langle X_2^1 \right\rangle \\ &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) \\ &= 3{,}5\end{aligned}$$

Die Korrelationsfunktion ist

$$\begin{aligned}K_{12} &= \left\langle \left(X_1^1 - \left\langle X_1^1 \right\rangle\right)\left(X_2^1 - \left\langle X_2^1 \right\rangle\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(X_1^1 - 3{,}5\right)\left(X_2^1 - 3{,}5\right) \right\rangle\end{aligned}$$

Da genauso viel negative Abweichungen von den Mittelwerten wie positive Auftauchen, folgt

$$= 0$$

Die Zufallsgrößen sind also unkorreliert.

H 1.3.e.2. Fußball-Physiker

Nun für den Fußball-Physiker

$$\begin{aligned}\left\langle X_1^2 \right\rangle &= \\ \left\langle X_2^2 \right\rangle &=\end{aligned}$$

H 1.3.f. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Ich verwende folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}+ &= \text{positive Probe} \\ - &= \text{negative Probe} \\ \mathrm{d} &= \text{gedopt} \\ \overline{\mathrm{d}} &= \text{nicht gedopt}\end{aligned}$$

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung B verwende ich folgende Notation:

$$P_B(A)$$

H 1.3.f.1. Positive Dopingprobe

$$\begin{aligned}
P(+) &= P(\mathrm{d}) \cdot P_{\mathrm{d}}(+) + P\left(\overline{\mathrm{d}}\right) \cdot P_{\overline{\mathrm{d}}}(+) \\
&= 0{,}2 \cdot 0{,}99 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 \\
&= 0{,}238
\end{aligned}$$

H 1.3.f.2. Negative Probe trotz Doping

$$P_{\mathrm{d}}(-) = 0{,}01$$

Ich vermute, dass die Frage auf die Wahrscheinlichkeit für einen falsch negativen Test abzielt. Diese ist

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{d} \wedge -) &= P(\mathrm{d}) \cdot P_{\mathrm{d}}(-) \\
&= 0{,}2 \cdot 0{,}01 \\
&= 0{,}002
\end{aligned}$$

H 1.3.f.3. Doping bei negativer Probe

$$\begin{aligned}
P_{-}(\mathrm{d}) &= \frac{P(\mathrm{d} \wedge -)}{P(-)} \\
&= \frac{0{,}002}{1 - 0{,}238} \\
&= 0{,}002\,62
\end{aligned}$$

H 1.3.g. Binomialverteilung

H 1.3.g.1. Mittelwert

$$
\begin{aligned}
\langle k \rangle &= \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{N!}{(k-1)!\,(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \\
&= \sum_{k'=0}^{N-1} \frac{N!}{k'!\,(N-1-k')!} p^{k'+1} (1-p)^{N-1-k'} \\
&= Np \sum_{k'=0}^{N'} \frac{N'!}{k'!\,(N'-k')!} p^{k'} (1-p)^{N'-k'} \\
&= Np \sum_{k'=0}^{N'} \binom{N'}{k'} p^{k'} (1-p)^{N'-k'} \\
&= Np
\end{aligned}
$$

H 1.3.g.2. Schwankungsquadrat