Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 10

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

H 16. Eichinvarianz

H 16a. Forminvarianz der Schrödingergleichung

Es soll gezeigt werden, dass mit den umgeeichten Feldern die Schrödingergleichung immer noch für die modifizierte Wellenfunktion gilt. Ich werde in die linke und rechte Seite der gestrichenen Schrödingergleichung die gestrichenen Größen einsetzen und versuchen zu zeigen, dass die ungestrichene Schrödingergleichung herauskommt.

Dabei benutze ich für diese Aufgabe testweise die Notation aus Mathematica, bei der Funktionsaufrufe mit eckigen Klammern, normale Multiplikation mit runden Klammern geschrieben wird. Bei der Exponentialfunktion werde ich ab einem Punkt die Argumente weglassen, es sollte jedoch noch immer eindeutig sein. So meint $\exp\psi$:

$$\exp\psi \rightsquigarrow \exp\left[\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} f[t, \boldsymbol{x}]\right]\psi[t, \boldsymbol{x}]$$

Zuerst die linke Seite:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\partial_t\psi' &= \mathrm{i}\hbar\exp\left[\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} f\right]\psi \\
&= \mathrm{i}\hbar\exp\left[\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c} f\right]\left(\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\dot{f}\psi + \dot{\psi}\right) \\
&= \mathrm{i}\hbar\exp\left(\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\dot{f}\psi + \dot{\psi}\right)
\end{aligned}$$

*mu@uni-bonn.de

Nun die kompliziertere rechte Seite. Dabei lasse ich den Vorfaktor $1/2m$ erstmal weg.

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f)\right)^2 \exp\psi + e\left(\phi + \frac{1}{c}\dot{f}\right)\exp\psi \\
&= \left(\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) - \frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla} f\right)^2 \exp\psi + e\left(\phi + \frac{1}{c}\dot{f}\right)\exp\psi
\end{aligned}
$$

Dies multipliziere ich alles aus.

$$
= \left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} + \frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\nabla} f) + 2\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) - \frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} + \frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2\right)\exp\psi
$$

An dieser Stelle wende ich die Operatoren auf $\exp\psi$ an. Dabei entstehen durch die Produktregel mit exp als auch ψ jede Menge Terme. Ich lasse hier einige Zwischenschritte weg, die ich beim Rechnen gemacht hatte. Dabei sind die mehreren Zeilen in der Klammer wie eine lange Zeile zu interpretieren, es ist kein Vektor. Jede Zeile entspricht grob einem Summand aus der vorherigen Klammer.

$$
= \exp\begin{pmatrix}
+\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 - \mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}\triangle f + \boldsymbol{p} \\
+\mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} \\
-\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} \\
+\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2 \\
+\mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\triangle f) - \frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 - \frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} \\
+2\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) \\
-\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 - \frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} \\
+\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2
\end{pmatrix}\psi
$$

Die ganzen Terme lassen sich jetzt noch nach den verschiedenen Ableitungen von f anordenen. Dabei ist die Matrix keine Matrix, sondern nur einen übersichtliche Anordnung der Terme, die eigentlich alle in einer Zeile stehen sollten.

$$
= \exp\begin{pmatrix}
+\boldsymbol{p}^2 & -\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) & -\mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\triangle f) & +\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 \\
+\mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A}) & -\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla} f) & +\mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\triangle f) & -\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 \\
-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} & -\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} & & +e\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 \\
-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} & +2\frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\nabla} f & & -\frac{e^2}{c^2}(\boldsymbol{\nabla} f)^2 \\
+\frac{e^2}{c^2} & -\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} & &
\end{pmatrix}\psi
$$

In der ersten Spalte steht genau das, was von der normale Schrödingergleichung zu erwarten ist. Der Faktor exp kann dann auf beiden Seiten weggekürzt werden. In der dritten und vierten Spalte steht nur noch null. In der zweiten Spalte ist wahrscheinlich ein Vorzeichenfehler drin. Ansonsten würde ich erwarten, dass dort auch null steht. Eventuell aber auch nicht, damit es sich mit etwas anderem weghebt.

$$= \exp\left(+\boldsymbol{p}^2 + \mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla A}) - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} + \frac{e^2}{c^2} - 2\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} \right)\psi$$

Nun schreibe ich beide Seiten zusammen:

$$\mathrm{i}\hbar\exp\left(\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\dot{f}\psi + \dot{\psi}\right) = \exp\left(+\boldsymbol{p}^2 + \mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla A}) - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} + \frac{e^2}{c^2} - 2\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} \right)\psi$$

Das exp fliegt – wie versprochen – raus.

$$\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\dot{f}\psi + \dot{\psi}\right) = \left(+\boldsymbol{p}^2 + \mathrm{i}\hbar\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla A}) - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} - \frac{e}{c}\boldsymbol{Ap} + \frac{e^2}{c^2} - 2\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p} \right)\psi$$

Nun kann ich die Lösung der ungestrichenen Schrödingergleichung abziehen.

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{i}e}{\hbar c}\dot{f}\psi &= 2\frac{e}{c}(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p}\psi \\ -\dot{f}\psi &= 2(\boldsymbol{\nabla} f)\boldsymbol{p}\psi \end{aligned}$$

Wenn hier $0 = 0$ herauskommen würde, wäre die Relation gezeigt. Jedoch sehe ich nicht, wie das passen soll. $\dot{f}$ und $\boldsymbol{\nabla} f$ kommen beide in den Transformationen vor, vielleicht geht das also doch irgendwie.

H 16b. Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \varrho &= \psi^*\psi \\ \dot{\varrho} &= \dot{\psi}^*\psi + \psi^*\dot{\psi} \end{aligned}$$

Setze die Schrödingergleichung ein.

$$= \left(\frac{H}{-\mathrm{i}\hbar}\psi\right)^*\psi + \psi^*\frac{H}{\mathrm{i}\hbar}\psi$$

Setze H ein. Dabei kann ich schon jetzt sehen, dass das $e\varphi$ wegfällt. Es ist rein reell und kein Operator, fällt also in der Differnz weg.

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}\hbar m}\left(\psi^*\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi - \left(\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi\right)^*\psi \right)$$

Ausmultiplizieren ...

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}\hbar m}\left(\psi^*\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2\right)\psi - \left(\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2\right)\psi\right)^*\psi\right)$$

Da p imaginär ist, kehrt sich das Vorzeichen um.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mathrm{i}\hbar m}\left(\psi^*\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2\right)\psi - \left(\left(\boldsymbol{p}^2 + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{p}\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{c^2}\boldsymbol{A}^2\right)\psi\right)\psi\right) \\
&= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\psi^* \triangle \psi - \triangle \psi^* \psi) + \frac{e}{2mc}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{A})(\psi^*\psi + \psi^*\psi) + \frac{e}{2mc}\boldsymbol{A}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi + \boldsymbol{\nabla}\psi^*\psi) \\
&= \frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\psi) + \boldsymbol{\nabla}\frac{e}{2mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{i}\hbar}{2m}(\boldsymbol{\nabla}\psi^*\psi - \psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi) - \frac{e}{2mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi\right) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

H 16c. Stromdichte

Da φ nicht mehr vorkommt, ändert sich nur noch das $\boldsymbol{A}$-Feld. Daher kommt einfach ein Summand

$$-\frac{e}{2mc}\boldsymbol{\nabla} f \psi^*\psi$$

dazu. Wobei ich erwarten würde, dass die Stromdichte invariant gegenüber der Umeichung ist.

H 17. Landau-Niveaus

H 17a. Kanonischer Impuls

Die kanonischen Gleichungen aus der klassischen Mechanik besagen für den Ort:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} = \frac{\pi_i}{m} = \frac{p_i}{m} + \frac{q}{cm}A^i$$

Die leite ich nach der Zeit ab und multipliziere mit m. Außerdem wende ich an, dass $\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}$:

$$m\ddot{x}^i = \dot{p}_i - qE^i$$

Die ist elektrische Kraft auf ein sonst freies Teilchen.

H 17b. Coulombeichung

Die Coulomb-Eichung ist (Summenkonvention):

$$\partial_i A^i = 0$$

Mit

$$\pi_i = p_i + \frac{q}{c}A^i = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{q}{c}A^i$$

kann ich den Kommutator schreiben:

$$[\pi_i, \pi_j] = \left[-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{q}{c}A^i, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{q}{c}A^j\right]$$

Die Ableitungen kommutieren untereinander, die A auch, allerdings nicht gemischt.

$$\begin{aligned}
&= \left[-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{q}{c}A^j\right] + \left[\frac{q}{c}A^i, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= -\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, A^j\right] + \left[A^i, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= -\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}A^j - \frac{\partial}{\partial x_j}A^i\right) \\
&= -\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}\epsilon^i{}_j{}^k\partial_i A^j \\
&= -\mathrm{i}\hbar\frac{q}{c}B^k
\end{aligned}$$

Wegen $B^1 = B^2 = 0$ ist $[\pi_i, \pi_z] = 0$.

Die Lorentzkraft wirkt nicht in z-Richtung, so dass dort ebene Wellen herauskommen. Daher kann der Separationsansatz so gewählt werden.

H 17c. Landaueichung

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}A\right)^2 \\
&= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p}^2 - 2\frac{e}{c}xBp_y + \frac{e^2}{c^2}x^2B^2\right)
\end{aligned}$$

Mit einem Ansatz $\psi(x,y) = \psi_x(x) + \psi_y(y)$ kann ich dies trennen:

$$E\psi(x,y) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + \frac{e^2}{c^2}x^2B^2\right)\psi_x(x) + \frac{1}{2m}\left(p_y^2 - 2\frac{e}{c}xBp_y + \frac{e^2}{c^2}x^2B^2\right)\psi_y(y)$$

Hier fehlen noch Inhalte.

Die Eigenfrequenz bekomme ich, in dem ich mir den Potentialterm für die x-Komponente anschaue:

$$\frac{1}{2m}\frac{e^2}{c^2}B^2 = \frac{m}{2}\omega^2 \iff \omega = \frac{eB}{mc}$$

H 17d. Energieniveaus

Hier fehlen noch Inhalte.