Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 9

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

H 14. Nichtentartete zeitunabhängige Störungstheorie

H 14a. Energiespektrum

Die Energien des ungestörten harmonischen Oszillators sind:

$$E_n^0 = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

In der Vorlesung hatten wir für die Störungen:

$$E_n^{(1)} = \langle n| H_1 |n\rangle , \quad E_n^{(2)} = \frac{\langle n| H_1 |m\rangle}{E_n^0 - E_m^0}$$

H 14b. Korrektur exakt null

Das n im Exponenten des Störterms ist im Konflikt mit dem n aus der Quantenzahl des harmonischen Oszillators. Daher benutze ich ν. Der Störterm ist:

$$H_1 = \lambda x^\nu$$

Ich schreibe den Ortsoperator x mit Auf- und Absteigeoperator:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a + a^\dagger\right)$$

Prof. Kubis hatte in der Vorlesung gesagt, dass er die Hütchen ($\hat{a}$) weglassen würde. Da alle Operatoren (H, L, S, J, ...) Großbuchstaben und die Quantenzahlen kleine Buchstaben (n, m, j, ...) haben, gäbe es auch keine Verwechslung. Wie sieht das denn mit kleinen Operatoren wie dem Absteigeoperator $\hat{a}$

*mu@uni-bonn.de

oder Ortsoperator $\hat{x}$ und großen Skalaren wie der Energie E aus? Gibt es da nicht doch irgendwie wieder Verwechslungsgefahr?

Die Korrektur erster Ordnung ist:

$$\lambda^\nu \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}^\nu \langle n| \left(a + a^\dagger\right)^\nu |n\rangle$$

Falls ν gerade ist, wird es in $\left(a + a^\dagger\right)^\nu$ immer Terme mit $aa^\dagger$ und $a^\dagger a$ geben, so dass der Vektor $|n\rangle$ bis auf einen Vorfaktor erhalten bleibt. Diese Terme tragen zur Korrektur bei. Bei ungeradem ν wird $|n\rangle$ allerdings immer verändert, da es eine ungerade Anzahl von Auf- und Absteigevorgängen hat. Somit ist die Korrektur null.

H 14c. Explizite Energiekorrektur

In diesem Aufgabenteil habe ich wohl einen ziemlich umständlichen Weg gewählt, da ich vier Seiten mit Rechnungen voll habe. Auf den nächsten Seiten sind meine handschriftlichen Rechnungen zu dieser Aufgabe.

H14

c) $\nu = 4$ explizit $E_n^{(1)}$ und $E_n^{(2)}$ bestimmen

$$E_n^{(1)} = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \langle n | (a+a^\dagger)^4 | n \rangle$$

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$$a^4 + 4a^3a^\dagger + 6a^2a^{\dagger 2} +$$

$$(a+a^\dagger)^2 = a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a + a^{\dagger 2}$$

Lege Multiplikationstabelle an und rechne nur interessante Teile aus

	a^2	$aa^\dagger$	$a^\dagger a$	$a^{\dagger 2}$
a^2				1 $a^2a^{\dagger 2}$ $a(a^\dagger a+1)a^\dagger$
$aa^\dagger$		2 $aa^\dagger aa^\dagger$	3 $aa^\dagger a^\dagger a$ $aa^\dagger(aa^\dagger-1)$	
$a^\dagger a$		4 $a^\dagger aaa^\dagger$	5 $a^\dagger aa^\dagger a$ $a^\dagger a(aa^\dagger-1)$	
$a^{\dagger 2}$	6 $a^{\dagger 2}a^2$ $a^\dagger(aa^\dagger-1)a$			

$$[a, a^\dagger] = 1$$

$$a^2a^{\dagger 2}|n\rangle = \sqrt{(n+2)^2(n+1)^2}\,|n\rangle$$

$$aa^\dagger aa^\dagger|n\rangle = \sqrt{(n+1)^4}\,|n\rangle$$

$$aa^\dagger a^\dagger a|n\rangle = \sqrt{(n+1)(n+1)\,n\,n}\,|n\rangle$$

$$a^\dagger aaa^\dagger|n\rangle = \sqrt{n\,n\,(n+1)\,(n+1)}\,|n\rangle$$

$$a^\dagger aa^\dagger a|n\rangle = \sqrt{n\,n\,n\,n}\,|n\rangle$$

$$a^{\dagger 2}a^2|n\rangle = \sqrt{(n-1)^2n^2}\,|n\rangle$$

$\Rightarrow \quad (n+2)(n+1) + (n+1)^2 + 2(n+1)n + n^2 + (n-1)n$

$= n^2 + 3n + 2 + n^2 + 2n + 1 + 2n^2 + 2n + n^2 + n^2 - n$

$= 6n^2 + 6n + 3$

$= 3(2n^2 + 2n + 1)$

$= \frac{3\hbar^2}{4m\omega^2}(2n^2 + 2n + 1)$

Zweite Ordnung. Da $\nu = 4$ ist, kann maximal $|n-m| = 4$ gelten. Fall $n = m$ war bei erster Ordnung schon erledigt. Fälle $|n-m| = 4, \ldots, 1$ sind noch übrig.

Fall $n = m+4$: Brauche nur a^{+4}, also

$$\frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}{4\hbar\omega}$$

Fall $n = m-4$: Brauche nur a^4, also

$$\frac{(m-3)(m-2)(m-1)\,m}{-4\hbar\omega}$$

Fall $n = m+3$: Nicht erreichbar.

Fall $n = m+2$: Brauche

$\rightsquigarrow$

$a^+a^+a^+a$	$(n+2)(n+1)\,n\,n$
$a^+a^+a\,a^+$	$(n+2)(n+1)(n+1)(n+1)$
$a^+a\,a^+a^+$	$(n+2)(n+2)(n+2)(n+1)$
$a\,a^+a^+a^+$	$(n+3)(n+3)(n+2)(n+1)$

Alles durch $2\hbar\omega$

Fall $n = m-2$: Brauche:

$a\,a\,a\,a^\dagger$	$(n-1)\; n\; (n+1)\; (n+1)$
$a\,a\,a^\dagger\,a$	$(n-1)\; n\; n\; n$
$a\,a^\dagger\,a\,a$	$(n-1)\; (n-1)\; (n-1)\; n$
$a^\dagger\,a\,a\,a$	$(n-2)\; (n-2)\; (n-1)\; n$

Alles durch $-2\hbar\omega$

Multipliziere alles aus:

$$\frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}{4\hbar\omega} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)\,m}{-4\hbar\omega}$$

$$= (m^2+7m+12)(m^2+3m+2) - (m^2-5m+6)(m^2-m)$$

$$= \cancel{m^4} + 3m^3 + 2m^2 + 7m^3 + 21m^2 + 14m + 12m^2 + 36m + 24$$
$$- (\cancel{m^4} - m^3 - 5m^3 + 5m^2 + 6m^2 - 6m)$$

$$= m^3(3+7+1+5) + m^2(2+21+12-5-6) + m(14+36+6)$$
$$+ 24$$

$$= 16m^3 + 24m^2 + 56m + 24 \quad / \; 4\hbar\omega$$

$$= (4m^3 + 6m^2 + 14m + 6) / \hbar\omega$$

Nun die andere:

$$(n+2)(n+1)\,n\,n = (n^2+3n+2)\,n^2$$
$$(n+2)(n+1)(n+1)(n+1) = (n^2+3n+2)(n^2+2n+1)$$
$$(n+2)(n+2)(n+2)(n+1) = (n^2+4n+4)(n^2+3n+2)$$
$$(n+3)(n+3)(n+2)(n+1) = (n^2+6n+9)(n^2+3n+2)$$

$$(n^2+3n+2)(n^2 + n^2+2n+1 + n^2+4n+4 + n^2+6n+9)$$

$$= (n^2+3n+2)(4n^2+12n+14) \quad / \; 2\hbar\omega$$

$$(2n^2+6n+7) \quad /\hbar\omega$$

$$= 2n^4+6n^3+7n^2+6n^3+18n^2+21n+4n^2+12n+14$$

$$= 2n^4+12n^3+29n^2+33n+14$$

Nun die andere Hälfte: Das müsste (n^2-n) sein

$$(n-1)\, n\, (n+1)(n+1) = (n^2-1)\quad (n^2+2n+1)$$

$$(n-1)\quad n \quad n \quad n = (n^2-1) \quad n^2$$

$$(n-1)\,(n-1)\,(n-1)\quad n = (n^2-1)\quad (n^2-2n+1)$$

$$(n-2)\,(n-2)\,(n-1)\quad n = (n^2-1)\quad (n^2-4n+4)$$

$$(n^2-1)\left(n^2+2n+1+n^2+n^2-2n+1+n^2-4n+4\right) \quad / -2\hbar\omega$$

$$= (n^2-1)\quad (4n^2-4n+6)$$

$$= (1-n^2)(2n^2-2n+3) \quad /\hbar\omega$$

$$= 2n^2-2n+3-2n^4+2n^3-3n^2 \quad /\hbar\omega$$

$$= -2n^4+2n^3-n^2-2n+3$$

Beide Hälfte zusammen:

$$\cancel{2n^4}+12n^3+29n^2+33n+14 \qquad \cancel{-2n^4}+2n^3-n^2-2n+3$$

$$= 14n^3+28n^2+32n+17 \quad /\hbar\omega$$

4 und 2 zusammen:

$$(4m^3+6m^2+14m+6) \; /\hbar\omega$$

$$14n^3+28n^2+32n+17 \quad /\hbar\omega$$

$$E_n^{(2)} = \frac{18n^3+34n^2+46n+23}{\hbar\omega}$$

H 15. Kopplung zweier Spin-1 Teilchen

H 15a. Kombinationen, Multipletts

Zwei Spin-1 Teilchen haben $j_1 = j_2 = 1$. Für den Gesamtdrehimpuls j gilt dann:

$$0 \leq j \leq 2$$

Die Multipletts sind:

$$\begin{cases} j = 0 & \text{Singulett} \\ j = 1 & \text{Triplett} \\ j = 2 & \text{Pentlett} \end{cases}$$

Da m_1 und m_2 aus $\{-1, 0, 1\}$ gewählt werden können, gibt es folgende Zustände:

$$\begin{aligned} &|0,0\rangle \\ &|1,1\rangle, \quad |1,0\rangle, \quad |1,-1\rangle \\ &|2,2\rangle, \quad |2,1\rangle, \quad |2,0\rangle, \quad |2,-2\rangle, \quad |2,-1\rangle \end{aligned}$$

H 15b. Zustandsbildung

Der Zustand $|2,2\rangle$ ist aus dem Pentlett und kann nur mit $m_1 = m_2 = 1$ gebildet werden. Also gilt:

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle\,|1,1\rangle$$

H 15c. Absteigeoperator

Es ist zu zeigen, dass der Absteigeoperator einfach die Summe der einzelnen ist:

$$\begin{aligned} J_-^{(1)} + J_-^{(2)} &= J_1^{(1)} - \mathrm{i}J_2^{(1)} + J_1^{(2)} - \mathrm{i}J_2^{(2)} \\ &= J_1^{(1)} + J_1^{(2)} - \mathrm{i}J_2^{(1)} - \mathrm{i}J_2^{(2)} \\ &= J_1 - \mathrm{i}J_2 \\ &= J_- \end{aligned}$$

Der Absteigeoperator erzeugt ein $\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}$. Ich wende ihn auf den Zustand $|2,2\rangle$ an:

$$\begin{aligned} J_-\,|2,2\rangle &= \left(J_-^{(1)} + J_-^{(2)}\right)|1,1\rangle\,|1,1\rangle \\ \hbar 2\,|2,1\rangle &= \hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|1,1\rangle + \hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle\,|1,0\rangle \\ |2,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\,|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle\,|1,0\rangle \end{aligned}$$

Wende den Absteigeoperator erneut an und teile durch den Vorfaktor auf der linken Seite. Zuerst entstehen vier Summanden auf der rechten Seite, diese fasse ich zusammen.

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1,-1\rangle|1,1\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}|1,0\rangle|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle|1,-1\rangle$$

Erneute Anwendung des Absteigeoperators.

$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle|1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle|1,-1\rangle$$
$$|2,-2\rangle = |1,-1\rangle|1,-1\rangle$$

H 15d. Orthonormalität

Gegeben ist:

$$|1,1\rangle = a|1,1\rangle|1,0\rangle + b|1,0\rangle|1,1\rangle$$

Wir wissen, dass die verschiedenen $\left|j,m\right\rangle$ orthogonal sind. Der Zustand $|2,1\rangle$ besteht aus den gleichen Zuständen, also muss der gegebene Zustand auf jeden Fall zu diesem Orthogonal sein:

$$\left\langle 2,1 \mid 1,1\right\rangle = 0$$
$$\left(a|1,1\rangle|1,0\rangle + b|1,0\rangle|1,1\rangle\right)^\dagger \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle|1,0\rangle\right) = 0$$

Durch das transponieren beim Adjungieren vertauschen sich die beiden Zustände, so dass auch hier nur Vektoren aus dem ersten Hilbertraum miteinander multipliziert werden.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}a^*\left\langle 1,1 \mid 1,0\right\rangle\left\langle 1,0 \mid 1,1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}a^*\left\langle 1,1 \mid 1,1\right\rangle\left\langle 1,0 \mid 1,0\right\rangle$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}b^*\left\langle 1,0 \mid 1,0\right\rangle\left\langle 1,1 \mid 1,1\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}b^*\left\langle 1,0 \mid 1,1\right\rangle\left\langle 1,1 \mid 1,0\right\rangle = 0$$
$$a^* + b^* = 0$$

Also muss $a = -b$ gelten. Zusätzlich sollte noch $a^2 + b^2 = 1$ erfüllt sein, damit die neue Wellenfunktion normiert bleibt. Somit folgt:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

H 15e. Absteigeoperator

Analog zur vorherigen Teilaufgabe wende ich jetzt J_- auf den Zustand $|1,1\rangle$ an. Die Rechnungen sind analog.

$$
\begin{aligned}
|1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle\,|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\,|1,1\rangle \\
|1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,1\rangle\,|1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1\rangle\,|1,1\rangle \\
|1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle\,|1,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,-1\rangle\,|1,0\rangle
\end{aligned}
$$

H 15f. Orthonormalität

Gegeben ist $|0,0\rangle$ als:

$$|0,0\rangle = a\,|1,1\rangle\,|1,-1\rangle + b\,|1,0\rangle\,|1,0\rangle + c\,|1,-1\rangle\,|1,1\rangle$$

Dieser Zustand muss zum Beispiel orthogonal zu $|2,0\rangle$ sein. Dazu bilde ich $\langle 2,0\,|\,0,0\rangle$ und erstelle eine Multiplikationstabelle für die drei Summanden jeweils:

$\langle\cdot\,\vert\,\cdot\rangle$	$a\,\vert 1,1\rangle\,\vert 1,-1\rangle$	$b\,\vert 1,0\rangle\,\vert 1,0\rangle$	$c\,\vert 1,-1\rangle\,\vert 1,1\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{6}}\,\vert 1,-1\rangle\,\vert 1,1\rangle$	0	0	$\frac{c}{\sqrt{6}}$
$\frac{2}{\sqrt{6}}\,\vert 1,0\rangle\,\vert 1,0\rangle$	0	$\frac{2b}{\sqrt{6}}$	0
$\frac{1}{\sqrt{6}}\,\vert 1,1\rangle\,\vert 1,-1\rangle$	$\frac{a}{\sqrt{6}}$	0	0

Als Bedingung erhalte ich also $a + 2b + c = 0$. Zusammen mit $a^2 + 4b^2 + c^2 = 1$ werden auch normierte Wellenfunktionen erzeugt.