Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 7

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

Vektor $\boldsymbol{L}$, Tensor $\boldsymbol{\mathsf{L}}$, Operator $\hat{L}$. Leere Stellen in Matrizen sind 0.

H 10. Spin-1 Operatoren

H 10a. Matrixdarstellung

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{\mathsf{L}}_z$ berechnen sich wie folgt:

$$\left(L_z\right)_{ij} = \left\langle i \,\middle|\, \hat{L}_z \,\middle|\, j \right\rangle, \quad i, j \in \{\uparrow, 0, \downarrow\}$$

Aufgrund der Orthogonalität der Basiszustände und dem Eigenwert m_l gilt:

$$\boldsymbol{\mathsf{L}}_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Nun $\hat{L}_\pm$:

$$\left(L_z\right)_{\uparrow,\uparrow} = \left\langle \uparrow \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, \uparrow \right\rangle = 0$$
$$\left(L_z\right)_{\uparrow,0} = \left\langle \uparrow \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, 0 \right\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{2} & \hat{L}_+ \\ 0 & \hat{L}_- \end{cases}$$
$$\left(L_z\right)_{\uparrow,\downarrow} = \left\langle \uparrow \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, \downarrow \right\rangle = 0$$
$$\left(L_z\right)_{0,\uparrow} = \left\langle 0 \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, \uparrow \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{L}_+ \\ \hbar\sqrt{2} & \hat{L}_- \end{cases}$$
$$\left(L_z\right)_{0,0} = \left\langle 0 \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, 0 \right\rangle = 0$$
$$\left(L_z\right)_{0,\downarrow} = \left\langle 0 \,\middle|\, \hat{L}_\pm \,\middle|\, \downarrow \right\rangle = \begin{cases} \hbar\sqrt{2} & \hat{L}_+ \\ 0 & \hat{L}_- \end{cases}$$

*mu@uni-bonn.de

$$\left(L_z\right)_{\downarrow,\uparrow} = \left\langle \downarrow \middle| \hat{L}_\pm \middle| \uparrow \right\rangle = 0$$
$$\left(L_z\right)_{\downarrow,0} = \left\langle \downarrow \middle| \hat{L}_\pm \middle| 0 \right\rangle = \begin{cases} 0 & \hat{L}_+ \\ \hbar\sqrt{2} & \hat{L}_- \end{cases}$$
$$\left(L_z\right)_{\downarrow,\downarrow} = \left\langle \downarrow \middle| \hat{L}_\pm \middle| \downarrow \right\rangle = 0$$

$$\boldsymbol{L}_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_- = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} & & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

Mit $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ und

$$\hat{L}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right), \quad \hat{L}_y = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right)$$

folgt:

$$\boldsymbol{L}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_y = \frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

H 10b. Kommutatoren in Matrixdarstellung

$$\left[\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_y\right] = \frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}}\left(\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{\hbar^2}{4\mathrm{i}}\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{L}_z$$
$$\left[\boldsymbol{L}_x, \boldsymbol{L}_z\right] = \frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & -1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = \mathrm{i}\hbar\boldsymbol{L}_y$$

$$\left[\boldsymbol{L}_y, \boldsymbol{L}_z\right] = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & 1 \\ & -1 & \end{pmatrix}\right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix} = \mathrm{i}\hbar \boldsymbol{L}_x$$

H 10c. Kommutator mit Hamiltonoperator

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(r)$$

In Kugelkoordinaten kann der Laplaceoperator in Radial- und Winkelanteil separiert werden:

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\triangle_r + \frac{1}{r^2}\triangle_{\theta,\phi}\right) + V(r)$$

Der Drehimpulsoperator ist gerade $\hat{L}^2 = \hbar^2 \triangle_{\theta,\phi}$. Trenne so Radial- und Winkelanteil im Hamiltonoperator:

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle_r + \frac{1}{2mr^2}\hat{L}^2 + V(r)$$

Daraus folgen die Kommutatoren:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \triangle_{\theta,\phi}\right] = 0 \implies \left[\hat{H}, \hat{L}^2\right] = 0$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right] = 0 \implies \left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = 0$$

H 11. Hantelmolekül

H 11a. Schwerpunktskoordinaten

Mit dem gleichen Ansatz aus dem normalen Keplerproblem:

$$\boldsymbol{r} := \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$$
$$\boldsymbol{R} := \frac{m_1\boldsymbol{x_1} + m_2\boldsymbol{x_2}}{M}$$

Daraus folgen die inversen Transformationen:

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}$$
$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}$$

Wende den Laplaceoperator auf diese beiden an. Schreibe $\underset{\sqsupset}{\triangle}$ für den Laplaceoperator, der nur auf $\sqsupset$ wirkt.

$$\triangle \boldsymbol{x}_1 = \triangle \boldsymbol{R} - \triangle \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}$$
$$\underset{\boldsymbol{x}_1}{\triangle}\boldsymbol{x}_1 = \left(\underset{\boldsymbol{R}}{\triangle} + \underset{\boldsymbol{r}}{\triangle}\right)\left(\boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}\right)$$
$$\underset{\boldsymbol{x}_1}{\triangle} = \left(\underset{\boldsymbol{R}}{\triangle} + \underset{\boldsymbol{r}}{\triangle}\right)$$

Analog folgt auch $\underset{\boldsymbol{x}_2}{\triangle}$. Transformiere damit den Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}\underset{\boldsymbol{x}_1}{\triangle} + \frac{1}{m_2}\underset{\boldsymbol{x}_2}{\triangle}\right)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\underset{\boldsymbol{x}_1}{\triangle} + \underset{\boldsymbol{x}_2}{\triangle}\right)$$

Jetzt sind die Koordinaten getrennt, allerdings steht vor dem Laplaceoperator, der auf $\boldsymbol{R}$ wirkt, ein μ, und kein M.

H 11b. Drehimpuls

Der Hamiltonoperator ist:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\triangle$$

Der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten ist:

$$\triangle = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\, r\, \frac{\partial}{\partial r} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}_{\triangle_{\theta,\phi}/r^2}$$

Mit $\hat{L}^2 = -\hbar^2 \triangle_{\theta,\phi}$, sowie $r =$ konstant folgt für den Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu r^2}\hat{L}^2$$

Mit $\Theta := \mu r^2$, dem Trägheitsmoment eines Kreisrings mit Radius r aus der klassischen Mechanik folgt:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\Theta}\hat{L}^2$$

H 11c. Eigenwerte und Entartungsgrade

Die stationäre Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} E\psi &= \hat{H}\psi \\ &= \frac{1}{2\Theta} \triangle_{\theta,\phi} \psi \\ &= \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2\Theta}\psi \end{aligned}$$

Die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$, der Eigenwert ist $\hbar^2\ell(\ell+1)$. Alle Werte von m haben die gleiche Energie, es gibt also eine Entartung von $2\ell + 1$ Zuständen.