Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

Sofern im Dokuments nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz.

[disclaimer]

(20)

physik421 – Übung 6

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2013-05-31

Lizenz: CC-BY-SA 3.0

Aufgabe	H 8	H 9	$\sum$
Punkte	/ 9	/ 11	/ 20

H 8. Unschärfe der kohärenten Zustände

H 8a. Erwartungswert des Ortsoperators

$$\begin{aligned}\langle \phi | \hat{x} | \phi \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle \phi \middle| \hat{a} + \hat{a}^\dagger \middle| \phi \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle \phi | \hat{a}\phi \rangle + \langle \hat{a}\phi | \phi \rangle \right)\end{aligned}$$

Benutze komplexe Symmetrie des Skalarprodukts.

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle \phi | \hat{a}\phi \rangle + \langle \phi | \hat{a}\phi \rangle^* \right)$$

Benutze gegebene Eigenwertgleichung für den Absteigeoperator.

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*)$$

$$\begin{aligned}\langle \phi | \hat{x}^2 | \phi \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \middle| \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger \right)^2 \middle| \phi \right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \middle| \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \middle| \phi \right\rangle\end{aligned}$$

*mu@uni-bonn.de

Benutze den Kommutator $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \left| \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} + 1 \right| \phi \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2 \left\langle \phi \left| \hat{a}^\dagger \hat{a} \right| \phi \right\rangle + \alpha^{*2} + 1 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2 \left\langle \hat{a}\phi \left| \hat{a}\phi \right\rangle + \alpha^{*2} + 1 \right) \right. \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2\alpha\alpha^* + \alpha^{*2} + 1 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left((\alpha + \alpha^*)^2 + 1 \right)
\end{aligned}
$$

Die Ortsunschärfe ist die Differenz von $\left\langle x^2 \right\rangle$ und $\langle x \rangle^2$. Also:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

H 8b. Impulsunschärfe

Gehe analog für den Impuls vor. Dort ist:

$$\hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger \right)$$

Dadurch ändert sich der Vorfaktor und die Vorzeichen in den Mischtermen:

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\alpha + \alpha^* \right)$$

$$\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \left((\alpha - \alpha^*)^2 - 1 \right)$$

Somit ist die Impulsunschärfe:

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

Und deren Produkt:

$$\Delta p \, \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

H 8c. Energie und -unschärfe

Mit dem Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)$$

Berechne Energieerwartungswert:

$$\begin{aligned}\left\langle\phi\left|\hat{H}\right|\phi\right\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\left\langle\phi\left|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right|\phi\right\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\alpha^*\alpha+1\right)\end{aligned}$$

Berechne zweites Moment der Verteilung:

$$\begin{aligned}\left\langle\phi\left|\hat{H}^2\right|\phi\right\rangle &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left\langle\phi\left|\left(2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1^2\right)\right|\phi\right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left\langle\phi\left|4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}+4\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right|\phi\right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(\left\langle\phi\left|4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right|\phi\right\rangle + 4\alpha^*\alpha+1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\left\langle\hat{a}\phi\left|\hat{a}\hat{a}^\dagger\right|\hat{a}\phi\right\rangle + 4\alpha^*\alpha+1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left\langle\phi\left|\hat{a}\hat{a}^\dagger\right|\phi\right\rangle + 4\alpha^*\alpha+1\right)\end{aligned}$$

Nutze den Kommutator.

$$\begin{aligned}&= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left\langle\phi\left|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right|\phi\right\rangle + 4\alpha^*\alpha+1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left(\alpha^*\alpha+1\right) + 4\alpha^*\alpha+1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^{*2}\alpha^2 + 8\alpha^*\alpha+1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(\left(2\alpha^*\alpha+1\right)^2 + 4\alpha^*\alpha\right)\end{aligned}$$

Die Differenz ist:

$$\left(\Delta\hat{H}\right)^2 = \hbar\omega|\alpha|^2$$

Breite des Peaks:

$$\frac{\Delta\hat{H}}{\left\langle\hat{H}\right\rangle} = \frac{\hbar\omega|\alpha|^2}{\frac{\hbar\omega}{2}\left(2\alpha^*\alpha+1\right)} \approx \frac{1}{|\alpha|}$$

✓ (9)

H 9. Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

H 9a. Orthonormalität

Zu zeigen, dass die Vektoren paarweise orthogonal sind. Die Rechnungen sind trivial:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\mathbf{e}}_\phi, \hat{\mathbf{e}}_r \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Der Betrag der Vektoren muss eins sein. Dies ist mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$ schnell zu sehen. o.k. (3)

H 9b. Gradient

Betrachte die Ableitungen nach den Koordinaten r, θ, ϕ in Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \langle \hat{\mathbf{e}}_r, \nabla \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= r\cos\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial z} \\ &= r\,\langle \hat{\mathbf{e}}_\theta, \nabla \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\phi} &= \frac{\partial x}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= -r\sin\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial y} \\ &= r\sin\theta\left\langle\hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \boldsymbol{\nabla}\right\rangle\end{aligned}$$

Dies liefert die Projektionen des $\boldsymbol{\nabla}$-Operators auf die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten. Stelle obige Gleichungen um und erhalte:

$$\begin{aligned}\nabla_r &= \frac{\partial}{\partial r} \\ \nabla_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ \nabla_\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned}$$

(3)

H 9c. Divergenz

Die Divergenz ist wie immer $\langle\boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle$. Allerdings ist $\boldsymbol{\nabla}$ nun nicht mehr der Vektor der gradlinigen partiellen Ableitungen ∂, sondern der Vektor der „covariant derivatives". Außerdem ist der metrische Tensor nicht mehr trivial. Betrachte folgendes als Skalarprodukt:

$$\sum_{i,j}\left\langle\hat{\boldsymbol{e}}_i\nabla_i, v_j, \hat{\boldsymbol{e}}_j\right\rangle$$

In einem normalen Koordinatensystem verschwinden aufgrund der Orthogonalität der $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ alle Terme mit $i \neq j$. Hier treten solche Terme allerdings auf:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_r\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}v_r\hat{\boldsymbol{e}}_r \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \hat{\boldsymbol{e}}_r v_r\underbrace{\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r}}_{=0} \\ &= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}v_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\ &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_r v_r\underbrace{\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r}}_{=0} \\ &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= 0\end{aligned}$$

Weil $\langle\hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\rangle = 0$ und $\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\partial r} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_\theta \nabla_\theta v_r \hat{e}_r &= \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} v_r \hat{e}_r \\
&= \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\hat{e}_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta}}_{=\hat{e}_\theta} \\
&= \frac{1}{r} v_r \\
\hat{e}_\theta \nabla_\theta v_\theta \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta \hat{e}_\theta \\
&= \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \underbrace{\hat{e}_\theta \frac{1}{r} v_\theta \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\hat{e}_r}}_{=0} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
\hat{e}_\theta \nabla_\theta v_\phi \hat{e}_\phi &= 0 \\
\hat{e}_\phi \nabla_\phi v_r \hat{e}_r &= \hat{e}_\phi \frac{1}{1 \sin\theta} v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi}}_{=\sin\theta \hat{e}_\phi} \\
&= \frac{1}{r} v_r \\
\hat{e}_\phi \nabla_\phi v_\theta \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin\theta} v_\theta \underbrace{\frac{\partial \hat{e}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos\theta \hat{e}_\phi} \\
&= \frac{1}{r}\tan\theta v_\theta \\
\hat{e}_\phi \nabla_\phi v_\phi \hat{e}_\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta} v_\phi \frac{\partial \hat{e}_\phi}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

Auf dem Zettel ist gegeben:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta v_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\tan\theta v_\theta \\
\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

(3)

Die Summanden sind alle, bis auf dem Faktor 2, oben zu finden. Somit ist die Identität gezeigt.

H 9d. Laplaceoperator

Der Laplaceoperator ist $\langle \nabla, \nabla \rangle$. Oder die Divergenz des Gradienten. Setze den Gradient in die Divergenz ein:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

Ziehe alles vor die Ableitung und erhalte den gesuchten Ausdruck.