Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 6

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

Aufgabe	H 8	H 9	$\sum$
Punkte	/ 9	/ 11	/ 20

H 8. Unschärfe der kohärenten Zustände

H 8a. Erwartungswert des Ortsoperators

$$\begin{aligned}\langle \phi \,|\, \hat{x} \,|\, \phi \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a} + \hat{a}^\dagger \,\middle|\, \phi \right\rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle \phi \,|\, \hat{a}\phi \rangle + \langle \hat{a}\phi \,|\, \phi \rangle \right)\end{aligned}$$

Benutze komplexe Symmetrie des Skalarprodukts.

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle \phi \,|\, \hat{a}\phi \rangle + \langle \phi \,|\, \hat{a}\phi \rangle^* \right)$$

Benutze gegebene Eigenwertgleichung für den Absteigeoperator.

$$= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\alpha + \alpha^* \right)$$

$$\begin{aligned}\langle \phi \,|\, \hat{x}^2 \,|\, \phi \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \,\middle|\, \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)^2 \,\middle|\, \phi \right\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \,\middle|\, \phi \right\rangle\end{aligned}$$

*mu@uni-bonn.de

Benutze den Kommutator $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} + 1 \,\middle|\, \phi \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2\left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a}^\dagger\hat{a} \,\middle|\, \phi \right\rangle + \alpha^{*2} + 1 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2\left\langle \hat{a}\phi \,\middle|\, \hat{a}\phi \right\rangle + \alpha^{*2} + 1 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\alpha^2 + 2\alpha\alpha^* + \alpha^{*2} + 1 \right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\left(\alpha + \alpha^*\right)^2 + 1 \right)
\end{aligned}
$$

Die Ortsunschärfe ist die Differenz von $\left\langle x^2 \right\rangle$ und $\langle x \rangle^2$. Also:

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

H 8b. Impulsunschärfe

Gehe analog für den Impuls vor. Dort ist:

$$\hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)$$

Dadurch ändert sich der Vorfaktor und die Vorzeichen in den Mischtermen:

$$\left\langle \hat{p} \right\rangle = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(\alpha + \alpha^*\right)$$

$$\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2} \left(\left(\alpha - \alpha^*\right)^2 - 1 \right)$$

Somit ist die Impulsunschärfe:

$$\left(\Delta p\right)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$$

Und deren Produkt:

$$\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\hbar m\omega}{2}} = \frac{\hbar}{2}$$

H 8c. Energie und -unschärfe

Mit dem Hamiltonoperator:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1\right)$$

Berechne Energieerwartungswert:

$$\begin{aligned}\left\langle \phi \,\middle|\, \hat{H} \,\middle|\, \phi \right\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2}\left\langle \phi \,\middle|\, 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \,\middle|\, \phi \right\rangle \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\alpha^*\alpha + 1\right)\end{aligned}$$

Berechne zweites Moment der Verteilung:

$$\begin{aligned}\left\langle \phi \,\middle|\, \hat{H}^2 \,\middle|\, \phi \right\rangle &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left\langle \phi \,\middle|\, \left(2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1^2\right) \,\middle|\, \phi \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left\langle \phi \,\middle|\, 4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} + 4\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \,\middle|\, \phi \right\rangle \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(\left\langle \phi \,\middle|\, 4\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} \,\middle|\, \phi \right\rangle + 4\alpha^*\alpha + 1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\left\langle \hat{a}\phi \,\middle|\, \hat{a}\hat{a}^\dagger \,\middle|\, \hat{a}\phi \right\rangle + 4\alpha^*\alpha + 1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a}\hat{a}^\dagger \,\middle|\, \phi \right\rangle + 4\alpha^*\alpha + 1\right)\end{aligned}$$

Nutze den Kommutator.

$$\begin{aligned}&= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left\langle \phi \,\middle|\, \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 \,\middle|\, \phi \right\rangle + 4\alpha^*\alpha + 1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^*\alpha\left(\alpha^*\alpha + 1\right) + 4\alpha^*\alpha + 1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(4\alpha^{*2}\alpha^2 + 8\alpha^*\alpha + 1\right) \\ &= \frac{\hbar^2\omega^2}{4}\left(\left(2\alpha^*\alpha + 1\right)^2 + 4\alpha^*\alpha\right)\end{aligned}$$

Die Differenz ist:

$$\left(\Delta\hat{H}\right)^2 = \hbar\omega|\alpha|^2$$

Breite des Peaks:

$$\frac{\Delta\hat{H}}{\left\langle\hat{H}\right\rangle} = \frac{\hbar\omega|\alpha|^2}{\frac{\hbar\omega}{2}\left(2\alpha^*\alpha + 1\right)} \approx \frac{1}{|\alpha|}$$

H 9. Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

H 9a. Orthonormalität

Zu zeigen, dass die Vektoren paarweise orthogonal sind. Die Rechnungen sind trivial:

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \hat{\boldsymbol{e}}_r \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Der Betrag der Vektoren muss eins sein. Dies ist mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$ schnell zu sehen.

H 9b. Gradient

Betrachte die Ableitungen nach den Koordinaten r, θ, ϕ in Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial z} \\ &= \left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_r, \boldsymbol{\nabla} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial z} \\ &= r\cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial z} \\ &= r\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \boldsymbol{\nabla} \right\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= -r\sin\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial x} + r\sin\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial y} \\
&= r\sin\theta\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_\phi, \boldsymbol{\nabla}\right\rangle
\end{aligned}
$$

Dies liefert die Projektionen des $\boldsymbol{\nabla}$-Operators auf die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten. Stelle obige Gleichungen um und erhalte:

$$
\begin{aligned}
\nabla_r &= \frac{\partial}{\partial r} \\
\nabla_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
\nabla_\phi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

H 9c. Divergenz

Die Divergenz ist wie immer $\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{v}\rangle$. Allerdings ist $\boldsymbol{\nabla}$ nun nicht mehr der Vektor der gradlinigen partiellen Ableitungen ∂, sondern der Vektor der „covariant derivatives“. Außerdem ist der metrische Tensor nicht mehr trivial. Betrachte folgendes als Skalarprodukt:

$$
\sum_{i,j}\left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_i\nabla_i, v_j, \hat{\boldsymbol{e}}_j\right\rangle
$$

In einem normalen Koordinatensystem verschwinden aufgrund der Orthogonalität der $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{e}}_j$ alle Terme mit $i \neq j$. Hier treten solche Terme allerdings auf:

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_r\hat{\boldsymbol{e}}_r &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}v_r\hat{\boldsymbol{e}}_r \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + \hat{\boldsymbol{e}}_r v_r\underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r}}_{=0} \\
&= \frac{\partial v_r}{\partial r} \\
\hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}v_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \hat{\boldsymbol{e}}_r v_r\underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r}}_{=0} \\
&= 0 \\
\hat{\boldsymbol{e}}_r\nabla_r v_\phi\hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= 0 && \text{Weil } \left\langle \hat{\boldsymbol{e}}_r, \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\right\rangle = 0 \text{ und } \tfrac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}\phi}{\partial r} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \nabla_\theta v_r \hat{\boldsymbol{e}}_r &= \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_r \hat{\boldsymbol{e}}_r \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{e}}_r + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta}}_{=\hat{\boldsymbol{e}}_\theta} \\
&= \frac{1}{r} v_r \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \nabla_\theta v_\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \underbrace{\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \frac{1}{r} v_\theta \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\hat{\boldsymbol{e}}_r}}_{=0} \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \nabla_\theta v_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= 0 \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \nabla_\phi v_r \hat{\boldsymbol{e}}_r &= \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{1 \sin \theta} v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \phi}}_{=\sin\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\phi} \\
&= \frac{1}{r} v_r \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \nabla_\phi v_\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} v_\theta \underbrace{\frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \phi}}_{=\cos\theta \hat{\boldsymbol{e}}_\phi} \\
&= \frac{1}{r} \tan \theta v_\theta \\
\hat{\boldsymbol{e}}_\phi \nabla_\phi v_\phi \hat{\boldsymbol{e}}_\phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} v_\phi \frac{\partial \hat{\boldsymbol{e}}_\phi}{\partial \phi} \\
&= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

Auf dem Zettel ist gegeben:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 v_r \right) &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2}{r} v_r \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tan \theta v_\theta \\
\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r_\phi}{\partial \phi}
\end{aligned}
$$

Die Summanden sind alle, bis auf dem Faktor 2, oben zu finden. Somit ist die Identität gezeigt.

H 9d. Laplaceoperator

Der Laplaceoperator ist $\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} \rangle$. Oder die Divergenz des Gradienten. Setze den Gradient in die Divergenz ein:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Ziehe alles vor die Ableitung und erhalte den gesuchten Ausdruck.