Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 5

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

Aufgabe	H 6	H 7	$\sum$
Punkte	/ 10	/ 10	/ 20

H 6. Unschärferelation beim Harmonischen Oszillator

H 6a. Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
\langle n \mid \hat{x} \mid n \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left\langle n \,\middle|\, \hat{a} + \hat{a}^\dagger \,\middle|\, n \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\langle n \mid \hat{a} \mid n \rangle + \left\langle n \,\middle|\, \hat{a}^\dagger \,\middle|\, n \right\rangle \right) \\
&= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n} \langle n \mid n-1 \rangle + \sqrt{n+1} \langle n \mid n+1 \rangle \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Analog: $\left\langle n \,\middle|\, \hat{p} \,\middle|\, n \right\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}
\left\langle n \,\middle|\, \hat{x}^2 \,\middle|\, n \right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle n \,\middle|\, \left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right)^2 \,\middle|\, n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} \left\langle n \,\middle|\, \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \,\middle|\, n \right\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1)
\end{aligned}$$

*mu@uni-bonn.de

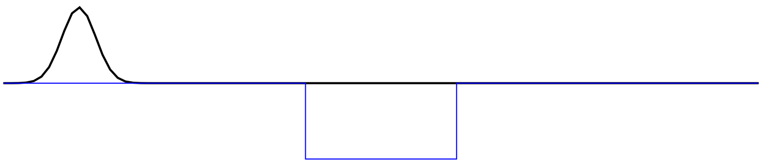
$$
\begin{aligned}
\left\langle n \left| \hat{p}^2 \right| n \right\rangle &= -\frac{\hbar m \omega}{2} \left\langle n \left| \left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)^2 \right| n \right\rangle \\
&= -\frac{\hbar m \omega}{2} \left\langle n \left| \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^{\dagger 2} \right| n \right\rangle \\
&= \hbar m \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

H 6b. Unschärferelation

$$
\begin{aligned}
(\Delta x)^2 \left(\Delta p\right)^2 &= \left(\left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2\right)\left(\left\langle p^2 \right\rangle - \left\langle p \right\rangle^2\right) \\
&= \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
(\Delta x)\left(\Delta p\right) &= \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

H 7. Wellenpakete

H 7a. Zeichnung



Wegen $\sigma \ll \left|x_0 + L/2\right|$ ist $x = -L/2$ bei mindestens 10σ, Integral vernachlässigbar.

H 7b. Entwicklungskoeffizienten

$$
\begin{aligned}
\left\langle \Psi(\cdot) \,\middle|\, \Psi(\cdot,0) \right\rangle &= \left\langle \alpha_+ \exp(\mathrm{i}kx) + \alpha_- \exp(-\mathrm{i}kx) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_+ \exp(\mathrm{i}kx) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \alpha_- \exp(-\mathrm{i}kx) \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \right\rangle \\
&= \left\langle \alpha_+ \,\middle|\, \exp(-\mathrm{i}kx) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \alpha_- \,\middle|\, \exp(\mathrm{i}kx) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \right\rangle \\
&= \alpha_+^\dagger \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp(-\mathrm{i}kx) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \\
&\quad + \alpha_-^\dagger \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp(\mathrm{i}kx) \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\mathrm{i}k_0 x\right) \\
&= \alpha_+^\dagger \mathscr{F}[\Psi](k) + \alpha_-^\dagger \mathscr{F}^{-1}[\Psi](k) \\
&= \alpha_+^\dagger \mathscr{F}[\Psi](k) + \alpha_-^\dagger \mathscr{F}[\Psi](-k) \\
&= \alpha_+^\dagger \tilde{\Psi}(k) + \alpha_-^\dagger \tilde{\Psi}(-k)
\end{aligned}
$$

H 7c. Fouriertransformation

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0 x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} + \mathrm{i}k_0 x - \mathrm{i}kx\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) x\right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x x_0}{\sigma^2} - \frac{x_0^2}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) x \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}} - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2} \left(\frac{x_0}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) \right) \right)^2 - \frac{x_0^2}{2\sigma^2} + \frac{2\sigma^2}{4} \left(\frac{x_0}{\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) \right)^2 \right)$$

$$\xi := \frac{x}{\sqrt{2\sigma^2}} - \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{2} \left(\frac{x_0}{2\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2\sigma^2} + \frac{2\sigma^2}{4} \left(\frac{x_0}{\sigma^2} + \mathrm{i}\left(k_0 - k\right) \right)^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \, \mathrm{e}^{-\xi^2}$$
$$= \sqrt{2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(k - k_0\right) \left(2\mathrm{i}x_0 + \sigma^2 \left(k - k_0\right) \right) \right)$$

H 7d. Wert von α_+

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \alpha_+^* \tilde{\Psi}(k,0) \left(\alpha_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \alpha_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \left|\alpha_+\right|^2 \tilde{\Psi}(k,0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \, \alpha_+^* \alpha_- \tilde{\Psi}(k,0) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$$
$$= \left|\alpha_+\right|^2 \psi(x,0) + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \alpha_+^* \alpha_- \psi(-x,0)}_{=0}$$

$\left|\alpha_+\right| = 1.$

H 7e. Gruppengeschwindigkeit

$$v_\mathrm{G} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \left(k_0\right) = \frac{\hbar}{m} k_0$$

Große t: Transmittierte Welle nach rechts, reflektierte nach links.