Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 4

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

Aufgabe	H 5
Punkte	/ 20

H 5. Hermitesche Polynome

H 5a. Ableitung

Diesen Ansatz habe ich aus [?, §§1,2,4]. Zuerst betrachte ich eine Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, deren Ableitungen fast die Hermetischen Polynome ergeben:

$$\begin{aligned} H_n(z) &= (-)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \\ &= (-)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) \\ &= (-)^n \mathrm{e}^{x^2} f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Dann betrachte ich die Taylorentwicklung der Funktion $f(x-y)$ um den Punkt $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x-y) &= \mathrm{e}^{-(x-y)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n \end{aligned}$$

Setze die obige Relation ein.

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x) \mathrm{e}^{-x^2} \\ f(x-y)\mathrm{e}^{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x) \end{aligned}$$

*mu@uni-bonn.de

Die linke Seite ist die erzeugende Funktion, ich nenne sie $w(x,y)$:

$$w(x,y) := \mathrm{e}^{2xy-y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x)$$

Die partielle Ableitung nach x liefert:

$$\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 2y w(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(z)$$

Allerdings kann ich den Ausdruck $2yw(x,y)$ auch erhalten, in dem ich folgendes rechne:

$$2w(x,y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x)$$
$$2yw(x,y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n!} H_n(x)$$

Verschiebe die Indizes.

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x)$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} n H_{n-1}(x)$$

Ein Koeffizientenvergleich der beiden Ausdrücke liefert die gesuchte Relation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

H 5b. Orthogonalität

Hier habe ich den Ansatz mit der erzeugenden Funktion aus [**?**, §5] übernommen. Ich führe einen Koeffizientenvergleich durch. Dazu beginne ich mit:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} w(x,y) w(x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{e}^{2xy-y^2} \mathrm{e}^{2xz-z^2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-x^2 + 2xy - y^2 + 2xz - z^2\right)$$

Führe eine quadratische Ergänzung im Argument durch.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \exp\left(-\left(x-(y+z)\right)^2 + 2yz\right)$$
$$= \exp\left(2yz\right)\sqrt{\pi}$$

Dies schreibe ich mit der Definition der Exponentialfunktion.

$$\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2yz)^n}{n!}$$

Betrachte den gleichen Ausdruck noch einmal, allerdings setze ich jetzt die Hermiteschen Polynome ein.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}w(x,y)w(x,z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}H_m(x)\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}H_n(x)\right)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{z^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\end{aligned}$$

Diese beiden Terme müssen gerade gleich sein. Also muss gelten:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2yz)^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\frac{z^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\\ \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2y)^n &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\end{aligned}$$

Da auf einer Seite eine unendliche Summe steht, auf der anderen Seite allerdings zwei davon, muss ich auf beiden Seite ein δ_{mn} einführen, damit das passt.

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2y)^n\delta_{mn} &= \delta_{mn}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\\ \sqrt{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2y)^n\delta_{mn} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\\ \sqrt{\pi}2^n\delta_{mn}n! &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-x^2}H_m(x)H_n(x)\end{aligned}$$

H 5c. Eigenfunktionen

Der Ansatz aus der Vorlesung für die Eigenfunktionen $\left|\psi_n\right\rangle$ war:

$$\psi_n(x) = H_n(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Wenn ich jetzt $\left\langle\psi_m\,\middle|\,\psi_n\right\rangle$ bilde, wird die Exponentialfunktion gerade die e^{-x^2}, so dass die obige Orthogonalitätsrelation gilt.

H 5d. Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n(x) &= (-)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \\
&= (-)^n 2x\mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} + (-)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} \\
&= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Wende die Relation aus Aufgabe H 5a an.

$$\begin{aligned}
2nH_{n-1}(x) &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x) \\
H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

H 5e. Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \left(1-\epsilon_n\right)\right) H_n(x) &= 0 \\
4n(n-1)H_{n-2}(x) - 4xnH_{n-1}(x) - \left(1-\epsilon_n\right) H_n(x) &= 0
\end{aligned}$$

Substituiere $m := n - 1$.

$$\begin{aligned}
4(m+1)mH_{m-1}(x) - 4x(m+1)H_m(x) - \left(1-\epsilon_{m+1}\right) H_{m+1}(x) &= 0 \\
\underbrace{2mH_{m-1}(x) - 2xH_m(x)}_{-H_{m+1}(x)} - \frac{1-\epsilon_{m+1}}{2(m+1)} H_{m+1}(x) &= 0 \\
\left(\frac{1-\epsilon_{m+1}}{2(m+1)} + 1\right) H_{m+1} &= 0 \\
\frac{1-\epsilon_n}{2n} + 1 &= 0 \\
\epsilon_n &= 2n+1
\end{aligned}$$