Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 3

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding *

2014-07-07

Aufgabe	H 4
Punkte	/ 20

H 4. Tunneleffekt

Zuerst vollziehe ich die Separation nach:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(t)\varphi_E(t) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\vartheta(t)\varphi_E(t) \\
\mathrm{i}\hbar \frac{\dot\vartheta(t)}{\vartheta(t)} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi_E''(x)}{\varphi_E(x)} + V(x) =: E
\end{aligned}
$$

Dies kann ich zerlegen in:

$$\vartheta(t) = c_1 \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t\right)$$

Sowie außerhalb der Barriere:

$$\varphi_E(x) = c_2 \exp\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right) + c_3 \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right)$$

Und innerhalb:

$$\varphi_E(x) = c_4 \exp\left(\frac{\sqrt{2(V_0 - E)m}}{\hbar}x\right) + c_5 \exp\left(-\frac{\sqrt{2(V_0 - E)m}}{\hbar}x\right)$$

*mu@uni-bonn.de

H 4a. Energien außerhalb des Intervalls

Energie	außen	innen
negativ	Abfall	Abfall
klein	Schwingung	Abfall
groß	Schwingung	Schwingung

Dies entspricht meiner Vorstellung: Ein komplett freies Teichen (große Energie) geht durch die Barriere durch. Ein Teilchen mit kleiner Energie ist außerhalb der Barriere frei, kann allerdings nicht beliebig tief in die Barriere eindringen.

H 4b. Lösungen

Bereich (A)

$$\varphi_E^{(A)}(x) = \alpha_+ \exp\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right) + \alpha_- \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right)$$

Bereich (B)

$$\varphi_E^{(B)}(x) = \beta_+ \exp\left(\frac{\sqrt{2(V_0 - E)m}}{\hbar}x\right) + \beta_- \exp\left(-\frac{\sqrt{2(V_0 - E)m}}{\hbar}x\right)$$

Bereich (C)

$$\varphi_E^{(C)}(x) = \gamma_+ \exp\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right) + \gamma_- \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}x\right)$$

Die Wellenzahlen k sind letztlich der Vorfaktor im Argument der Exponentialfunktion ohne i:

$$k(E) = \frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}, \quad k'(E) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2(V_0 - E)m}}{\hbar}$$

H 4c. Anschlussbeziehungen

Um die Anschlussbeziehungen herzuleiten, schreibe ich die Funktionen φ_E mit den k kompakter:

Bereich (A)

$$\varphi_E^{(A)}(x) = \alpha_+ \exp(\mathrm{i}kx) + \alpha_- \exp(-\mathrm{i}kx)$$

Bereich (B)

$$\varphi_E^{(B)}(x) = \beta_+ \exp\left(\mathrm{i}k'x\right) + \beta_- \exp\left(-\mathrm{i}k'x\right)$$

Bereich (C)

$$\varphi_E^{(C)}(x) = \gamma_+ \exp(ikx) + \gamma_- \exp(-ikx)$$

An den Übergangsstellen $\pm L/2$ muss die Wellenfunktion φ_E und $\frac{d}{dx}\varphi_E$ stetig sein. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned}
\varphi_E^{(A)}\left(-\frac{L}{2}\right) &= \varphi_E^{(B)}\left(-\frac{L}{2}\right) \\
\varphi_E^{(B)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \varphi_E^{(C)}\left(\frac{L}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}\varphi_E^{(A)}\left(-\frac{L}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\varphi_E^{(B)}\left(-\frac{L}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}\varphi_E^{(B)}\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\varphi_E^{(C)}\left(\frac{L}{2}\right)
\end{aligned}$$

Setze die Funktionen $\varphi_E^{(A)}$ und $\varphi_E^{(B)}$ ein:

$$\begin{aligned}
\alpha_+ \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) + \alpha_- \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) &= \beta_+ \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) + \beta_- \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) \\
\beta_+ \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) + \beta_- \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) &= \gamma_+ \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) + \gamma_- \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) \\
-ik\alpha_+ \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) + ik\alpha_- \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) &= -ik'\beta_+ \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) + ik'\beta_- \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) \\
ik'\beta_+ \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) - ik'\beta_- \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) &= ik\gamma_+ \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) - ik\gamma_- \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right)
\end{aligned}$$

Bei der weiteren Herleitung habe ich mich stark an [**?**, Seite 269] gehalten. Dann teile ich die dritte und die vierte Gleichung jeweils durch $-ik$ und führe $y := k'/k$ ein.

$$\begin{aligned}
\alpha_+ \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) + \alpha_- \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) &= \beta_+ \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) + \beta_- \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) \\
\beta_+ \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) + \beta_- \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) &= \gamma_+ \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) + \gamma_- \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) \\
\alpha_+ \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right) - \alpha_- \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) &= y\beta_+ \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) - y\beta_- \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) \\
-y\beta_+ \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right) + y\beta_- \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right) &= -\gamma_+ \exp\left(ik\frac{L}{2}\right) + \gamma_- \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ab hier führe ich folgende Abkürzungen ein:

$$\tau_+ := \exp\left(ik\frac{L}{2}\right), \quad \tau_- := \exp\left(-ik\frac{L}{2}\right), \quad \tau'_+ := \exp\left(ik'\frac{L}{2}\right), \quad \tau'_- := \exp\left(-ik'\frac{L}{2}\right)$$

Damit werden die vier Gleichungen zu:

$$\begin{aligned}
\alpha_+\tau_- + \alpha_-\tau_+ &= \beta_+\tau'_- + \beta_-\tau'_+ \\
\beta_+\tau'_+ + \beta_-\tau'_- &= \gamma_+\tau_+ + \gamma_-\tau_- \\
\alpha_+\tau_- - \alpha_-\tau_+ &= y\beta_+\tau'_- - y\beta_-\tau'_+ \\
-y\beta_+\tau'_+ + y\beta_-\tau'_- &= -\gamma_+\tau_+ + \gamma_-\tau_-
\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe sollte dieser Schritt zwar noch nicht vollzogen werden, damit ich dieses Gleichungssystem allerdings etwas einfacher lösen kann, mache ich bereits hier die Annahme, dass die Welle von rechts einläuft, also $\gamma_- = 0$. Außerdem lege ich $\alpha_+ = 1$ fest.

$$\begin{aligned}
\tau_- + \alpha_-\tau_+ &= \beta_+\tau'_- + \beta_-\tau'_+ \\
\beta_+\tau'_+ + \beta_-\tau'_- &= \gamma_+\tau_+ \\
\tau_- - \alpha_-\tau_+ &= y\beta_+\tau'_- - y\beta_-\tau'_+ \\
-y\beta_+\tau'_+ + y\beta_-\tau'_- &= -\gamma_+\tau_+
\end{aligned}$$

Betrachte nun Erste plus Dritte, sowie Zweite plus Vierte.

$$\begin{aligned}
2\tau_- &= (1+y)\beta_+\tau'_- + (1-y)\beta_-\tau'_+ \\
(1-y)\beta_+\tau'_+(1+y)\beta_-\tau'_- &= 0
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem in β_+ und β_- schreibe ich in Matrixform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (1+y)\tau'_- & (1-y)\tau'_+ \\ (1-y)\tau'_+ & (1+y)\tau'_- \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} \beta_+ \\ \beta_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tau_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses System löse ich mit der Cramer'schen Regel:

$$\det \boldsymbol{A} = 2(1+y)^2\tau'^2_- - (1-y)^2\tau'^2_+$$

Die Lösungen sind:

$$\begin{aligned}
\beta_+ &= \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} 2\tau_-\tau'_-(1+y) \\
\beta_- &= -\frac{1}{\det \boldsymbol{A}} 2\tau_-\tau'_+(1-y)
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse bringe ich jetzt in folgendes System ein:

$$\begin{aligned} \beta_+\tau'_+ + \beta_-\tau'_- &= \gamma_+\tau_+ + \gamma_-\tau_- \\ y\beta_+\tau'_+ - y\beta_-\tau'_- &= \gamma_+\tau_+ - \gamma_-\tau_- \end{aligned}$$

Nach Umformen erhalte ich:

$$\gamma_+ = \frac{4\tau_-^2 y}{\det \boldsymbol{A}}$$

Laut [**?**, Seite 270] soll für α_- folgendes herauskommen, was ich selbst allerdings nicht erhalten konnte:

$$\alpha_- = -2\mathrm{i}\sin\left(2k'\frac{L}{2}\right)\frac{1-y^2}{\det \boldsymbol{A}}\tau_-^2$$

Meine k und k' waren so definiert, dass das Problem gleich dem Potentialtopf war:

$$k(E) = \frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}, \quad k'(E) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2(V_0-E)m}}{\hbar}$$

Um eine Interpretation für dieses Problem zu erlangen, führe ich $\bar{k}$ ein. Ich glaube, Paul hat $\bar{k}$ und k' genau anders herum.

$$k(E) = \frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}, \quad \bar{k}(E) := \frac{\sqrt{2(V_0-E)m}}{\hbar}$$

Nun muss ich die Transformation $k' \mapsto -\mathrm{i}\bar{k}$ überall vornehmen. Dadurch wird auch $y \mapsto -\mathrm{i}y$. Die Determinante $\det \boldsymbol{A}$ wird zu:

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= 2(1-\mathrm{i}y)^2\tau_-'^2 - 2(1+\mathrm{i}y)^2\tau_+'^2 \\ &= 2\left(1-2\mathrm{i}y-y^2\right)\exp\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right) - 2\left(1+2\mathrm{i}y-y^2\right)\exp\left(-2\bar{k}\frac{L}{2}\right) \\ &= \left(1-y^2\right)\sinh\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right) - 2\mathrm{i}y\cosh\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right) \end{aligned}$$

H 4d. Von links einlaufendes Teilchen

Die Vereinfachung ist $\gamma_- = 0$. Diese hatte ich zur Reduktion des Rechenaufwands allerdings schon in der vorherigen Teilaufgabe vorgenommen, so dass ich hier nicht vergleichen kann.

H 4e. Transmissions- und Reflexionskoeffizient

Der Reflexionskoeffizient:

$$\begin{aligned}
R &= \left|\alpha_-\right|^2 \\
&= \left|-2\mathrm{i}\sin\left(2k'\frac{L}{2}\right)\frac{1-y^2}{\det \boldsymbol{A}}\tau_-^2\right|^2 \\
&= 2\left|\sin\left(2k'\frac{L}{2}\right)\right|^2\left|\frac{1-y^2}{\det \boldsymbol{A}}\right|^2\underbrace{\left|\tau_-^2\right|^2}_{=1}
\end{aligned}$$

Hier wende ich die Transformation $y^2 \mapsto -y^2$ an.

$$= 2\sinh^2\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right)\frac{\left(1+y^2\right)^2}{|\det \boldsymbol{A}|^2}$$

Der Transmissionskoeffizient:

$$\begin{aligned}
T &= \left|\gamma_+\right|^2 \\
&= \left|\frac{4y}{\det \boldsymbol{A}}\right|^2 \\
&= 16\frac{y^2}{|\det \boldsymbol{A}|^2}
\end{aligned}$$

Und die transformierte Determinante $(\det \boldsymbol{A})^2$:

$$\begin{aligned}
(\det \boldsymbol{A})^2 &= \left(1-y^2\right)^2\sinh^2(\ldots) + 4y^2\cosh^2(\ldots) \\
&= \left(1-2y^2+y^4\right)\sinh^2(\ldots) + 4y^2\cosh^2(\ldots) \\
&= \sinh^2(\ldots) - 2y^2\sinh^2(\ldots) + y^4\sinh^2(\ldots) + 4y^2 + 4y^2\sinh^2(\ldots) \\
&= \left(1+2y^2+y^4\right)\sinh^2(\ldots) + 4y^4 \\
&= \left(1+y^2\right)^2\sinh^2(\ldots) + 4y^4
\end{aligned}$$

Die Summe von R und T ist, wenn man einige Faktor 2 in R und T verteilt, gerade 1. In [**?**, Seite 283] kommt es sehr ähnlich heraus, ich gehe davon aus, dass ich mich nur verrechnet habe.

H 4f. Grenzfall der Koeffizienten

Laut [**?**, Seite 283] sind die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten für die Potenzialbarriere mit

$$x := \frac{\bar{k}}{k} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

gegeben als:

$$T(E) = \frac{4x^2}{4x^2 + \left(1 + x^2\right)^2 \sinh^2\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right)}, \quad R(E) = \frac{\left(1 + x^2\right)^2 \sinh^2\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right)}{4x^2 + \left(1 + x^2\right)^2 \sinh^2\left(2\bar{k}\frac{L}{2}\right)}$$

Der Grenzwert einer breiten und hohen Potenzialbarriere bedeutet, dass V_0 und L als groß anzusehen sind. Dabei strebt $T(E)$ gegen 0 und $R(E)$ gegen 1. Das Teilchen wir also ausschließlich reflektiert.