Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 2

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding [*]

2014-07-07

Aufgabe	H 2	H 3	$\sum$
Punkte	/ 14	/ 6	/ 20

H 2. Unschärferelation

H 2a. Relation

$$\left\langle \left(y - \langle y \rangle\right)^2 \right\rangle = \left\langle y^2 - 2y \langle y \rangle + \langle y \rangle^2 \right\rangle$$

Benutze Linearität.

$$= \langle y^2 \rangle - \left\langle 2y \langle y \rangle \right\rangle + \left\langle \langle y \rangle^2 \right\rangle$$

Mittelung ist idempotent.

$$\begin{aligned} &= \langle y^2 \rangle - 2 \langle y \rangle \langle y \rangle + \langle y \rangle^2 \\ &= \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \end{aligned}$$

Wobei anscheinend $\left\langle \psi \middle| \hat{O} \middle| \psi \right\rangle$ einfach als $\langle \hat{O} \rangle$ geschrieben wird.

H 2b. Erwartungswerte und Integral

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen sich innerhalb vom Intervall $[y, z]$ aufhält, ist:

$$P(y < x < z) = \int_y^z \mathrm{d}x \left|\psi(x,t)\right|^2 |x\rangle$$

[*] mu@uni-bonn.de

Der Erwartungswert für die Position ist das Integral über alle x:

$$\langle \hat{x} \rangle = \int \mathrm{d}x \left| \psi(x,t) \right|^2 x$$

Der Mittelwert des Ortsquadrates ist analog, nur das x durch x^2 ausgetauscht wird:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int \mathrm{d}x \left| \psi(x,t) \right|^2 x^2$$

Die Abweichung $(\Delta x)^2$ kann ich auch schreiben als:

$$\begin{aligned}(\Delta x)^2 &= \left\langle \psi \,\middle|\, \hat{x}^2 \,\middle|\, \psi \right\rangle - \left\langle \psi \,\middle|\, \hat{x} \,\middle|\, \psi \right\rangle^2 \\ &= \int \mathrm{d}x \, \psi^\dagger(x,t) x^2 \psi(x,t) - \left(\int \mathrm{d}x \, \psi^\dagger(x,t) x \psi(x,t) \right)^2\end{aligned}$$

Für die Abweichung des Impulses gehe ich analog vor. Der Operator $\hat{p}$ ist $-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}(\Delta p)^2 &= \left\langle \psi \,\middle|\, \hat{p}^2 \,\middle|\, \psi \right\rangle - \left\langle \psi \,\middle|\, \hat{p} \,\middle|\, \psi \right\rangle^2 \\ &= -\hbar^2 \int \mathrm{d}x \, \psi^\dagger(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,t) + \hbar^2 \left(\int \mathrm{d}x \, \psi^\dagger(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) \right)^2\end{aligned}$$

H 2c. Skalarprodukt und dessen Minimum

H 2c.1. Skalarprodukt herleiten

Gegeben ist:

$$\psi_\alpha(x,t) = \alpha \left(x - \langle \hat{x} \rangle \right) \phi(x,t) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left(\hat{p} - \left\langle p \right\rangle \right) \phi(x,t)$$

Das Skalarprodukt ist:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \psi_\alpha \,\middle|\, \psi_\alpha \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \psi_\alpha^\dagger \psi_\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left| \alpha \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right) \phi(x,t) + \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \left(\hat{p} - \langle p \rangle\right) \phi(x,t) \right|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Bigg(\underbrace{\alpha^2 \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right) \phi(x,t)}_{S_1} \\
&\quad \underbrace{- \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \left(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right) \phi(x,t)}_{S_2} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle\right) \phi(x,t)}_{S_3} \\
&\quad \underbrace{+ \frac{1}{\hbar^2} \left(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle\right) \phi(x,t)}_{S_4} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Betrachte die Summanden einzeln.

Summand S_1

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \alpha^2 \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right) \phi(x,t) \\
&= \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^2 \left|\phi(x,t)\right|^2 \\
&= \alpha^2 \left\langle \phi \,\middle|\, \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^2 \,\middle|\, \phi \right\rangle \\
&= \alpha^2 (\Delta x)^2
\end{aligned}
$$

Summanden S_2 und S_3

$$
\begin{aligned}
S_2 + S_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(&-\frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \left(\hat{p}^\dagger - \left\langle \hat{p} \right\rangle\right) \phi^\dagger(x,t) \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right) \phi(x,t) \\
&+ \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \left(x - \langle \hat{x} \rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(\hat{p} - \left\langle \hat{p} \right\rangle\right) \phi(x,t) \Big) \\
= \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(&\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) x \phi(x,t) + \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) \langle \hat{x} \rangle \phi(x,t) + \left\langle \hat{p} \right\rangle \phi^\dagger(x,t) x \phi(x,t) \\
&- \cancel{\left\langle \hat{p} \right\rangle \langle x \rangle \phi^\dagger(x,t) \phi(x,t)} - x \phi^\dagger(x,t) \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t) - x \phi^\dagger(x,t) \left\langle \hat{p} \right\rangle \phi(x,t) \\
&+ \langle \hat{x} \rangle \phi^\dagger(x,t) \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t) + \cancel{\langle \hat{x} \rangle \phi^\dagger(x,t) \left\langle \hat{p} \right\rangle \phi(x,t)} \Big) \\
= \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \Big(&-\mathrm{i}\hbar \phi^\dagger(x,t) \phi(x,t) + \langle \hat{x} \rangle \left\langle \hat{p} \right\rangle + \langle \hat{x} \rangle \left\langle \hat{p} \right\rangle + \mathrm{i}\hbar \phi^\dagger(x,t) \phi(x,t) - \langle \hat{x} \rangle \left\langle \hat{p} \right\rangle \Big) \\
= -\alpha &+ \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} \langle \hat{x} \rangle \left\langle \hat{p} \right\rangle + \alpha \\
= \frac{\mathrm{i}\alpha}{\hbar} &\langle \hat{x} \rangle \left\langle \hat{p} \right\rangle
\end{aligned}
$$

Hier sollte eigentlich gerade $-\alpha$ herauskommen, damit es weiter unten passt.

Summand S_4

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\hbar^2} \left(\hat{p} - \left\langle \hat{p} \right\rangle\right)^\dagger \phi^\dagger(x,t) \left(\hat{p} - \left\langle \hat{p} \right\rangle\right) \phi(x,t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\hbar^2} \Big(\underbrace{\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi(x,t)}_{S_{4a}} + \underbrace{\left\langle \hat{p} \right\rangle \phi^\dagger(x,t) \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,t)}_{S_{4b}} \\
&\quad \underbrace{-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) \left\langle \hat{p} \right\rangle \phi(x,t)}_{S_{4c}} + \underbrace{\left\langle \hat{p} \right\rangle^2 \phi^\dagger(x,t) \phi(x,t)}_{\left\langle \hat{p} \right\rangle^2} \Big)
\end{aligned}
$$

Betrachte Summanden S_{4a} und führe eine partielle Integration aus, um den Impulsoperator auf die zweite Funktion umzuwälzen:

$$
\begin{aligned}
S_{4a} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\hbar^2} \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \phi^\dagger(x,t) \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \phi \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \left\langle \hat{p}^2 \right\rangle
\end{aligned}
$$

Betrachte den Summanden S_{4b}:

$$
\begin{aligned}
S_{4b} &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \langle \hat{p} \rangle \, \phi^\dagger(x,t) \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{p} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \phi^\dagger(x,t) \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{p} \rangle \langle \phi \mid \hat{p} \mid \phi \rangle \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{p} \rangle^2
\end{aligned}
$$

Betrachte den Summanden S_{4c}:

$$
\begin{aligned}
S_{4c} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \phi^\dagger(x,t) \langle \hat{p} \rangle \phi(x,t) \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{p} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \phi^\dagger(x,t) \left(-\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi(x,t) \\
&= -\frac{1}{\hbar^2} \langle \hat{p} \rangle^2
\end{aligned}
$$

Zusammen ist der Summand S_4 also:

$$
S_4 = \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2
$$

Summanden zusammen Mit allen Summanden zusammen:

$$
\langle \psi_\alpha \mid \psi_\alpha \rangle = \alpha^2 (\Delta x)^2 - \alpha + \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2
$$

H 2c.2. Minimum bestimmen

$$
\langle \psi_\alpha \mid \psi_\alpha \rangle = \alpha^2 (\Delta x)^2 - \alpha + \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2
$$

Quadratische Ergänzung in α:

$$
= \left(\alpha \Delta x - \frac{1}{2\Delta x} \right)^2 + \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2 - \frac{1}{4(\Delta x)^2}
$$

Das Minimum ist erreicht, wenn der quadratische Term 0 ist. Also setze $\alpha := \frac{1}{2(\Delta x)}$. Da es sich hier um ein Skalarprodukt handelt, das per Definition positiv-definit sein muss, muss der Ausdruck großer gleich 0 sein.

$$
= \frac{1}{\hbar^2} (\Delta p)^2 - \frac{1}{4(\Delta x)^2} \geq 0
$$

Diesen Ausdruck stelle ich um und ziehe die Wurzel. Heraus kommt die gesuchte Relation:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$

H 3. Kommutatoren

Gegeben sind die folgenden Operatoren:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\psi(x) &= x\,\frac{\partial}{\partial x}\,\phi(x) \\
\hat{B}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'\psi\left(x'\right)
\end{aligned}$$

H 3a. Kommutator bestimmen

$$\hat{A}\hat{B}\psi(x) = x\,\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'\psi\left(x'\right)$$

Hier wende ich die Formel für die Ableitung von Integralen an:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} \mathrm{d}y\, f(y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x) f\left(h(x)\right) - \frac{\partial g}{\partial x}(x) f\left(g(x)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x^2\psi(x) \\
\hat{B}\hat{A}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'^2\,\frac{\partial}{\partial x'}\,\psi\left(x'\right) \\
&= x'^2\psi\left(x'\right)\Big|_{-\infty}^{x} - 2\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'\psi\left(x'\right) \\
&= x^2\psi(x) - 2\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'\psi\left(x'\right)
\end{aligned}$$

Der Kommutator ist:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 2\hat{B}$$

H 3b. Lösung des Eigenwertproblems

$$
\begin{aligned}
\hat{B}\psi(x) &= \lambda\psi(x) \\
\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}x'\, x'\psi\left(x'\right) &= \lambda\psi(x) \\
x\psi(x) &= \lambda \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x) \\
\mathrm{d}x\, x &= \lambda \frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} \\
\int \mathrm{d}x\, x &= \lambda \int \frac{\mathrm{d}\psi}{\psi} \\
\frac{1}{2}x^2 + C &= \lambda \ln\left(\psi(x)\right) \\
\exp\left(\frac{1}{2\lambda}x^2 + C\right) &= \psi(x)
\end{aligned}
$$

Als Einschränkung muss $\lambda \neq 0$ gelten, damit nicht durch 0 geteilt wird. Falls ψ eine L^2 Funktion sein soll, muss $\lambda < 0$ gelten, damit die Funktion quadratintegrabel ist.