Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik421.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik421/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik421 – Übung 1

Gruppe 4 – Franz Niecknig

Martin Ueding

mu@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 1	$\sum$
Punkte	/ 20	/ 20

H 1. Dirac'sche Deltadistribution

H 1a. Stufenfunktion

Es soll gezeigt werden, dass die Ableitung von G_a der Deltadistribution δ_a entspricht.

Wir beginnen mit der Definition von G_a:

$$\begin{aligned}
G_a[\phi] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \theta(x-a)\phi(x) \\
G_a'[\phi] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \theta(x-a)\phi(x) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \theta'(x-a)\phi(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \lim_{h\to 0} \frac{\theta(x+h-a)-\theta(x-a)}{h}\phi(x)
\end{aligned}$$

Diese Ableitung ist für $x \neq a$ gleich 0. Wenn $x \in \left[a-h/2, a+h/2\right]$ liegt, dann ist der Bruch gerade $1/h$. Das Integral geht dann allerdings nur über einen Bereich, der h breit ist. ϕ war als Schwartzfunktion, also aus C^∞ gegeben. Daher kann sie in einem verschwindend kleinen Intervall durch ihre nullte Näherung an der Stelle a ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
&= -h\frac{1}{h}\phi(a) \\
&= -\phi(a)
\end{aligned}$$

Und dies ist gerade die Definition der Deltadistribution.

H 1b. Fouriertransformierte von g_ϵ

Es soll gezeigt werden, dass die Fouriertransformierte von $g_\epsilon(x)$ im Limes $\epsilon \to 0$ der Deltadistribution entspricht.

Dazu bilde ich die zuerst Fouriertransformierte von g_ϵ.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[g_\epsilon\right](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2 - \mathrm{i}\omega x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\left(\frac{1}{2}\epsilon^2 x^2 + \mathrm{i}\omega x\right)\right)\end{aligned}$$

Ich vervollständige das Quadrat in der Exponentialfunktion.

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon x + \mathrm{i}\frac{\omega}{\epsilon}\right)^2 - \frac{\omega^2}{\epsilon^2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\omega^2}{\epsilon^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon x + \mathrm{i}\frac{\omega}{\epsilon}\right)^2\right)\end{aligned}$$

An dieser Stelle substituiere ich $z := \epsilon x / \sqrt{2} + \mathrm{i}\omega/\epsilon$. Das Integral erhält dann den Wert $\sqrt{\pi}$. Durch $\mathrm{d}z / \mathrm{d}x$ erhalte ich noch einen Faktor $\sqrt{2}/\epsilon$.

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\epsilon^2}\right)$$

Eigentlich sollte allerdings folgendes herauskommen, damit nachher aus 1 herauskommt:

$$\mathscr{F}\left[g_\epsilon\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{\omega^2}{\epsilon^2}\right)$$

Die Funktionenschar habe ich in Abbildung 1 geplottet.

Zur Probe habe ich das Integral über diese Funktion mit Mathematica rechnen lassen, es kommt unabhängig von ϵ gerade 1 heraus. Damit ist die eine Bedingung erfüllt, im Grenzwert sind auch alle Funktionswerte für $x \neq 0$ gerade 0.

H 1c. Beweis

Es soll folgende Identität gezeigt werden:

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \mathscr{F}\left[g_\epsilon \mathscr{F}\left[\psi\right]\right](-k) = \psi(k)$$

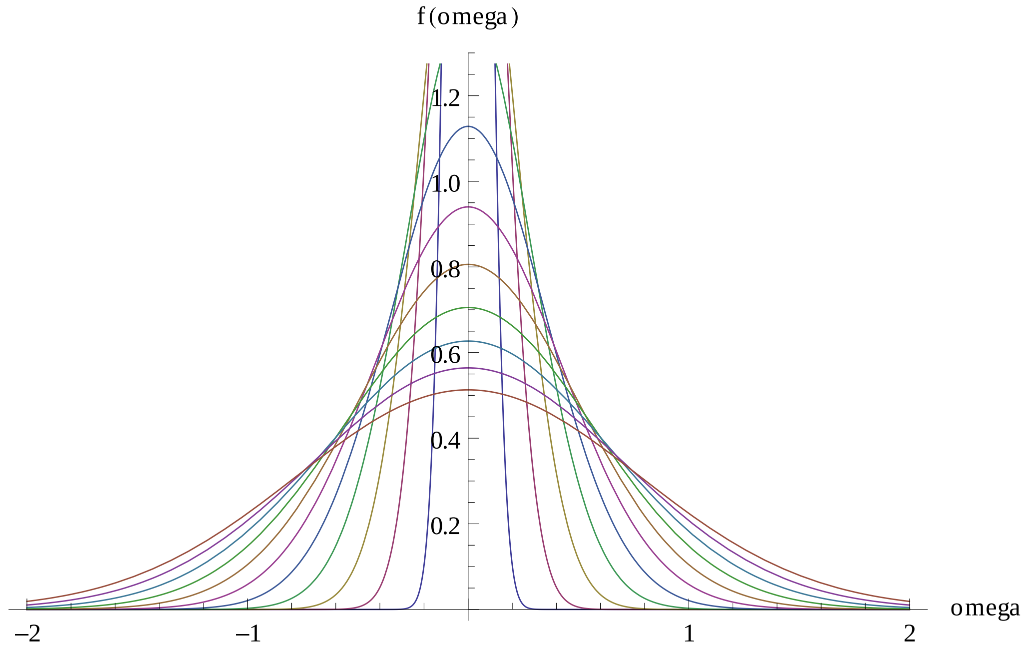

Abbildung 1: $\mathscr{F}\left[g_\epsilon\right](\omega)$ für $\epsilon = 0.1, 0.2, \ldots, 1.1$

Dazu beginne ich mit der linken Seite:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\mathscr{F}\left[g_\epsilon\,\mathscr{F}\left[\psi\right]\right](-k) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}b\,\exp\left(-\mathrm{i}b(-k)\right) g_\epsilon(b)\int \mathrm{d}a\,\exp\left(-\mathrm{i}ab\right)\psi(a) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}a\int \mathrm{d}b\,\exp\left(\mathrm{i}bk-\mathrm{i}ab\right) g_\epsilon(b)\psi(a)
\end{aligned}
$$

Einsetzen von g_ϵ:

$$
= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}a\int \mathrm{d}b\,\exp\left(\mathrm{i}bk-\mathrm{i}ab-\frac{1}{2}\epsilon^2 b^2\right)\psi(a)
$$

Quadratische Ergänzung in der Exponentialfunktion:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}a\int \mathrm{d}b\,\exp\left(-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon b-\frac{\mathrm{i}(k-a)}{\epsilon\sqrt{2}}\right)^2+\frac{(k-a)^2}{2\epsilon^2}\right)\right)\psi(a) \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int \mathrm{d}a\,\exp\left(-\frac{(k-a)^2}{2\epsilon^2}\right)\int \mathrm{d}b\,\exp\left(-\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon b-\frac{\mathrm{i}(k-a)}{\epsilon\sqrt{2}}\right)^2\right)\right)\psi(a)
\end{aligned}
$$

Im Integral über $\mathrm{d}b$ führe ich eine neue Koordinate ein: $c := \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon b - \frac{\mathrm{i}(k-a)}{\epsilon\sqrt{2}}$. Die Ableitung $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}b}$ ist $\epsilon/\sqrt{2}$. Das verbleibende Integral hat dann den Wer $\sqrt{\pi}$.

$$= \sqrt{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int \mathrm{d}a \exp\left(-\frac{(k-a)^2}{2\epsilon^2}\right)\psi(a)$$

Dies ist die δ-Distribution aus der vorherigen Aufgabe, diesmal mit $\delta(k-a)$. Somit ist dies:

$$\begin{aligned} &= \int \mathrm{d}a\, \delta(k-a)\psi(a) \\ &= \psi(k) \end{aligned}$$

H 1d. Inverse Fouriertransformation

Es soll die inverse Fouriertransformation hergeleitet werden.

Die inverse Fouriertransformation ist wie die normale Fouriertransformation und eine Parität $\mathscr{P}$ sowie einen Faktor 2π, also $\mathscr{F}^{-1} = \mathscr{F} \circ \mathscr{P}\ 2\pi$. Wenn wir dies annehmen, können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{F}\left[g_\epsilon \mathscr{F}\left[\psi\right]\right](-k) &= \psi(k) \\ \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{F}\left[g_\epsilon \mathscr{F}\left[\psi\right]\right] \circ \mathscr{P} &= \psi \\ \lim_{\epsilon\to 0} \mathscr{F}^{-1}\left[g_\epsilon \mathscr{F}\left[\psi\right]\right] &= \psi \\ \mathscr{F}^{-1}\left[\lim_{\epsilon\to 0} g_\epsilon \mathscr{F}\left[\psi\right]\right] &= \psi \end{aligned}$$

Im Limes $\epsilon \to 0$ wird die Funktion g_ϵ zur Identität und fällt somit weg.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}\left[\mathscr{F}\left[\psi\right]\right] &= \psi \\ \psi &= \psi \end{aligned}$$

Somit müsste die obige Annahme gelten und es gilt:

$$\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathscr{F} \circ \mathscr{P}$$

H 1e. Distribution D_k

Es soll gezeigt werden, dass $\mathscr{F}\left[D_k\right] = 2\pi\delta(x-k)$.

Gegeben ist die Distribution D_k mit:

$$D_k[\phi](k) = \int_\infty^\infty \mathrm{d}x\ \exp(\mathrm{i}kx)\,\phi(x)$$

Auf diese Distribution wenden wir nun die Fouriertransformation an:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[D_k[\phi]\right](\omega) &= \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \exp(-\mathrm{i}k\omega) \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp(\mathrm{i}kx)\, \phi(x) \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\big(\mathrm{i}k(x-\omega)\big)\, \phi(x) \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \phi(x) \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, \exp\big(\mathrm{i}k(x-\omega)\big)
\end{aligned}
$$

Das hintere Integral über k nimmt für den Fall $x - \omega = 0$ den Wert ∞ an. Für alle anderen Werte von $x - \omega$ ist das Integral undefiniert oder 0. Dies entspricht $\delta(x - \omega)$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \phi(x)\delta(x-\omega) \\
&= \delta_{\omega}[\phi]
\end{aligned}
$$

Es fehlt allerdings noch ein Faktor 2π.