

Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf <http://martin-ueding.de/de/university/physik411/> gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]


physik411 – Übung 8

Gruppe 2 – Florian Seidler

Martin Ueding *

2013-06-12

Lizenz: CC-BY-SA 3.0 

Aufgabe	1	2	Σ
Punkte	/ 18	/ 14	 / 32

1. Das Morse-Potential eines diatomischen Moleküls

1a. Energieabstand der Schwingungsniveaus

Die gegebene Formel kann von den Einheiten nicht stimmen:

$$U(r) \neq \mu \omega^2 (r - r_0) / 2$$

$$J \neq \text{kg s}^{-2} \text{ m}$$

$$\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \neq \text{kg s}^{-2} \text{ m}$$

Laut [Kubis & Urbach, 2013, Folie 12] ist diese eigentlich:

$$\frac{\mu}{2} \omega_0^2 (r - r_0)^2$$

Die Energieeigenwerte sind dann:

$$E_v = \hbar \omega \left(v + \frac{1}{2} \right)$$

Der Abstand der Energien ist $\hbar \omega$.



1b. Obertöne

Sind die Obertöne die, die sich durch die Korrektur ergeben?



*mu@uni-bonn.de

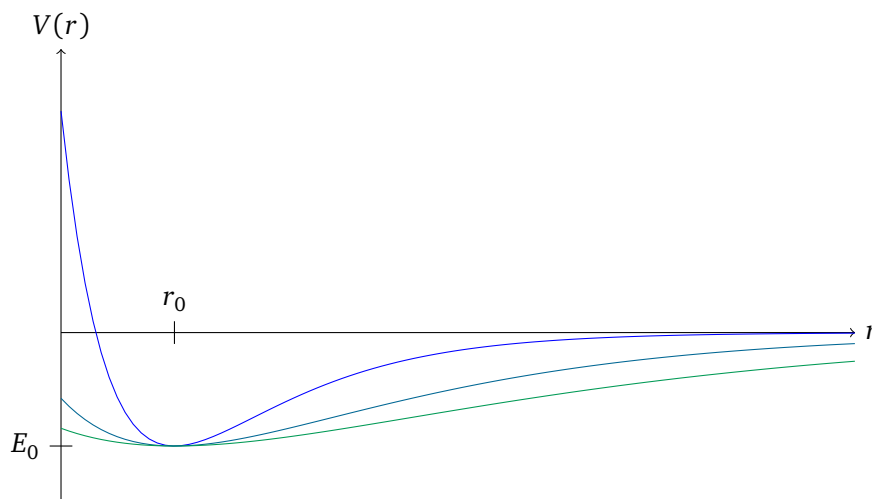



Abbildung 1: In **blau** das Morse-Potential für $l = 1r_0$. In **mittlernachtsblau** den Fall $l = 2r_0$. Sowie in **waldgrün** $l = 3r_0$.

1c. Plot und Größen

Für verschiedene l ist das Morse-Potential in Abbildung 1 dargestellt.

Die Rolle von l scheint eine Art charakteristische Länge zu sein. Je größer l ist, desto länger reicht das Potential. Beim Wasserstoff ist dies ähnlich, da die zugeordneten Laguerrefunktionen mit zunehmendem l auch langreichweitiger werden. Daher ist auch der Quantendefekt bei größeren l kleiner, weil sich die Elektronen nicht mehr so häufig am Kern aufhalten. 

1d. Schwingungsfrequenz

Ich bilde die Taylorentwicklung des Potentials $U_M(r)$ um den Punkt $r = r_0$:

$$U_M(r) = -E_0 + \frac{2E_0}{l^2} (r - r_0)^2$$

Die Krümmung ist das Potential des harmonischen Oszillators. Dieses ist laut [Kubis & Urbach, 2013, Folie 12]:

$$\frac{\mu}{2} \omega_0^2 (r - r_0)^2$$

Durch Umstellen erhalte ich:


$$\omega_0^2 = \frac{4E_0}{l^2 \mu}$$



1e. Dissoziationsenergie

Wie beim Wasserstoff auch, muss so viel Arbeit W_{Diss} aufgebracht werden, dass die Gesamtenergie gleich null ist. Dabei gehe ich davon aus, dass vom Minimum des Potentials gerechnet wird.

$$W_{\text{Diss}} = -E_0 + \hbar \frac{4E_0}{l^2 \mu} \left(\nu + \frac{1}{2} \right)$$

Je kleiner das n ist, desto mehr zusätzliche Energie wird gebraucht. Je nach l kann der Grundzustand schon ungebunden sein. 

1f. Energiespektrum

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{vib}} &= \hbar \omega \left(\nu + 1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \left(\nu + 1 + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{4E_0} \right) - \hbar \omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\hbar \omega}{4E_0} \right) \\ &= \hbar \omega + (\nu + 1) \frac{\hbar^2 \omega^2}{2E} \end{aligned}$$


Es kommt noch ein Summand

$$(\nu + 1) \frac{\hbar^2 \omega^2}{2E}$$

dazu. Um einen Summanden $\Delta E_{\text{vib}} - \Delta E_{\text{vib}}^{\text{HO}}$ zu bekommen, muss dann ein Faktor

$$\frac{\Delta E_{\text{vib}} - \Delta E_{\text{vib}}^{\text{HO}}}{\Delta E_{\text{vib}}^{\text{HO}}}$$

eingebraucht werden.

Je schwerer, und damit träger, das Gesamtsystem wird (größere μ), desto weniger sollte es vom harmonischen Oszillator abweichen, da nur kleinere Auslenkungen erreicht werden. Bei höheren Anregungsniveaus ν wird, wie am Plot zu sehen, das harmonische Potential eine immer schlechtere Idealisierung. 

2. Fouriertransformationsinfrarotspektroskopie (FTIR)

2a. Skizze

Eine Skizze der Apparatur ist in [Abbildung 2](#).

2b. Art der Strahlungsquelle

Es könnte vielleicht einen Laser geben, der im Infrarotbereich strahlt. Eine LED wird wahrscheinlich kein Licht in diesem Spektralbereich abgeben, sie strahlen ja auch meistens kaltes Licht aus. Wobei es

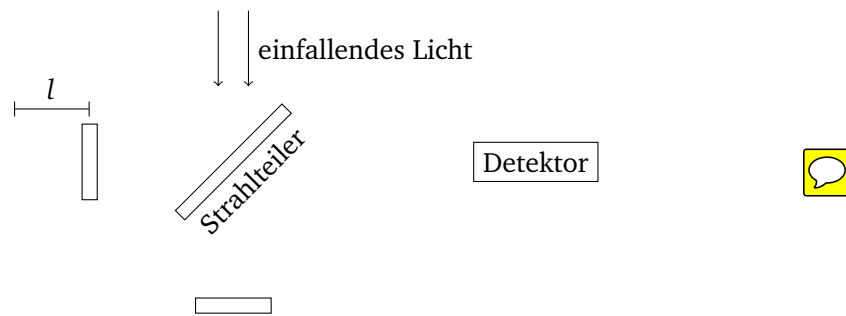


Abbildung 2: Michelsoninterferometer für die Fouriertransformationsinfrarotspektroskopie. Die beiden unbeschrifteten Rechtecke sind Spiegel, der eine davon beweglich. Seine Position wird durch l gegeben.

auch IR-LEDs gibt, zum Beispiel für Fernbedienungen (Dank an Lino). Eine Glühlampe eigentlich sich wunderbar dafür. Schließlich hat die EU ja die normalen Glühlampen verboten, weil sie zu viel Wärme abstrahlen, und nicht genug Licht.

Der Infrarotbereich befindet sich zwischen Wellenlängen von 780 nm bis 1 mm. [Wikipedia, 2013]

Die ziemlich warme Raumtemperatur von 300 K lässt sich mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz in eine Maximalwellenlänge umrechnen:

$$T \lambda_{\max} = 2897,8 \mu\text{m K} \implies \lambda_{\max} = 9,659 \mu\text{m}$$



2c.

Es kommen zwei gleiche Strahlen zur Interferenz, beide mit $I_0/2$. Dabei ist

$$\tau = \frac{2l}{c}$$

die Zeit, die das Licht auf dem einen Arm des Interferometers mehr unterwegs ist. Das Feld sei linear polarisiert, so dass $E(t)$ eine skalare Größe ist. Die Amplitude, die beim Detektor ankommt, ist dann die Differenz der beiden Felder, da ein Strahl beim Durchgang durch den Strahlteiler so reflektiert wird, dass seine Amplitude gespiegelt wird.

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2} (E(t) - E(t - \tau))$$

Die Energiedichte $\varrho_{W_{\text{Feld}}}$ ist

$$\varrho = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(t),$$

wobei der Strahlungsfluss I gerade ϱc ist.

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \left(\frac{1}{2} (E(t) - E(t - \tau)) \right)^2 \\ &= \frac{\varepsilon_0 c}{4} (E^2(t) - 2E(t)E(t - \tau) + E^2(t - \tau)) \end{aligned}$$

Die Intensität muss allerdings über eine ganze Periode gemittelt werden, damit die mittlere Intensität herauskommt:

$$I = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{\varepsilon_0 c}{4} (E^2(t) - 2E(t)E(t - \tau) + E^2(t - \tau))$$

Mit einer Transformation $t' := t - \tau$ wird der letzte Summand wie der erste zu $\mathcal{C}(0)$, also I_0 .

$$= \frac{1}{2} I_0 - \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{\varepsilon_0 c}{2} E(t)E(t - \tau)$$

Damit auch Licht eines **schwarzen Körpers** benutzt werden kann, muss die Periode unendlich lang sein.

$$= \frac{1}{2} I_0 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \frac{\varepsilon_0 c}{2} E(t)E(t - \tau)$$

Das ist die gesuchte Relation.

$$= \frac{1}{2} I_0 - \frac{1}{2} \mathcal{C}(\tau)$$

2d. Auflösungsvermögen

Es gelten:

$$\omega k = c, \quad \omega = \frac{k}{c}, \quad \Delta\omega = \frac{\Delta k}{c}$$

Bei einer Diskreten Fouriertransformation (DFT oder FFT) erhalte ich mit N Messpunkten **N Frequenzen.** **(Oder $N - 1$?)** Um zwei Frequenzen mit Wellenzahlunterschied von $\Delta k = 0,1 \text{ cm}^{-1}$ unterscheiden zu



können, brauche ich:

$$N = \frac{k}{\Delta k} = 40\,000$$



Der Spiegel sollte sich soweit bewegen, dass mindestens eine komplette Periode abgedeckt ist, also I maximal und minimal geworden ist. Die Spiegelbewegung muss also abdecken:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 15\,708\text{ nm} =: N\Delta l$$

Der Bruchteil Δl muss dann sein:

$$\Delta l = 3,92\text{ nm}$$

So klein, wie die Werte allerdings sind, sind die Längen auch vielleicht um den Faktor N größer.



Literatur

[Kubis & Urbach, 2013] Kubis, B. & Urbach, C. (2013). physik421 – Theoretische Physik 3 – Quantenmechanik.

[Wikipedia, 2013] Wikipedia (2013). Infrarotstrahlung. <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Infrarotstrahlung&oldid=118680521>.