

Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf <http://martin-ueding.de/de/university/physik411/> gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik411 – Übung 5

Gruppe 2 – Florian Seidler

Martin Ueding *

2013-05-15

Lizenz: CC-BY-SA 3.0 

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	<input type="text"/> / 7	<input type="text"/> / 8	<input type="text"/> / 6	<input type="text"/> / 12	 / 33

1. Wasserstoffähnliche Systeme

Der Bohr-Radius ist gegeben als:

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

Daraus folgt, dass:

$$a_0 \propto \frac{1}{m_e Z}$$

1a. Positronium

Für das Positronium benutze ich die Lösung des Keplerproblems mit dem Hamilton-Jakobi-Formalismus. Dort wird das Problem im Schwerpunktsystem betrachtet, wobei eine reduzierte Masse m' um den dann fixen Kern kreist. Die Zentralkraft zwischen den beiden Massen bleibt erhalten, der Abstand auch. Diese reduzierte Masse ist, aus den Massen m des Satelliten und M des Kerns:

$$m' = \frac{mM}{m + M}$$

In diesem Problem ist:

$$m' = \frac{1}{2}m_e$$

*mu@uni-bonn.de

Somit wächst der Radius auf $2a_0$. Die Energie ist gegeben durch:

$$E(a_0) = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0}$$



Mit dem Radius $2a_0$ erhalte ich die Hälfte der Rydbergenergie, $-6,8 \text{ eV}$.

1b. Myonischer Wasserstoff

Beim myonischen Wasserstoff benutze ich den gleichen Ansatz, hier ist die reduzierte Masse:

$$m' = \frac{m_p m_\mu}{m_p + m_\mu} = \frac{1836 \cdot 200}{1836 + 200} m_e = 180 m_e$$

Jetzt ist die Masse also deutlich größer, so dass der Radius kleiner wird: $a_0/180$. Die Energie wächst um den Faktor 180 an, also $-2448,0 \text{ eV}$.

Im 1s-Zustand ist der Zustand:

$$\psi(x, t) = R_{1,0}(r) Y_{0,0}(\theta, \phi)$$

Dabei ist $Y_{0,0} = 1$, und $R_{1,0}(r)$ ist gegeben als:

$$R_{1,0}(r) = 2C_0 \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right), \quad C_0 = \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}, \quad \rho = \frac{2Zr}{a_0}$$

Also:

$$\psi(x, t) = 2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Zr}{a_0}\right)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen im Kern ist, ist:

$$\begin{aligned} P_{\text{im Kern}} &= 4\pi \int_0^{r_p} dr r^2 \psi^\dagger(x, t) \psi(x, t) \\ &= 16\pi \frac{Z^3}{a_0^3} \int_0^{r_p} dr r^2 \exp\left(-\frac{2rZ}{a_0}\right) \end{aligned}$$

Dieses Integral kann man mit Substitution und dann partieller Integration lösen. Ich [mache dies mit Mathematica](#) und erhalte für das mit $r_p = 0,8 \text{ fm}$ und $a_0/180$ folgenden Wert für den Innenbereich: $2,14 \times 10^{-45} \text{ m}^3$. Für den gesamten Raum erhalte ich $7,98 \times 10^{-38} \text{ m}^3$. Der Quotient gibt mir die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Myon im Kern aufhält: $2,68 \times 10^{-8}$. Die Einheit für die Wahrscheinlichkeit erhalte ich, weil ich die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi^\dagger \psi$ nicht noch durch m^3 geteilt hatte.

Für den Wasserstoff muss ich in das obige nur a_0 anstelle von $a_0/180$ einsetzen und erhalte: $4,55 \times 10^{15}$.



1c. Wasserstoffähnliches Uran

Beim Wasserstoffatom kann der Kern als unendlich schwer angekommen werden, hier geht das erst recht. Daher brauche ich nur den Effekt zu betrachten, das $Z = 92$ ist. Somit schrumpft der Radius auf $a_0/92$, die Energie wächst auf $92E_{\text{Ryd}}$.

Mit dem gleichen Ansatz wie oben, nur dass ich noch $Z = 91$ unterbringen, sowie r_p auf $\sqrt[3]{238} \cdot 1,3 \text{ fm}$ setzen muss, erhalte ich für die Wahrscheinlichkeit im Kern **0,00231**.



2. Zeeman-Effekt im Bohr-Modell

Die Energie eines Dipols μ in einem magnetischen Feld B ist:

$$E = -\langle \mu, B \rangle$$

Mit $\mu = \gamma \ell$ kann ich dies schreiben als:

$$E = nB\mu$$

Die Zentralkraft muss um die Lorenzkraft ergänzt werden:

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + e v B$$

Wenn $L \perp B$ ist, dann wird eine Drehung um π keine Änderung in der Energie haben. Allerdings wirkt dann ein Drehmoment auf das Atom.



3. Spektroskopie der Zeeman- und Isotopieverschiebung

3a. Verschiebung des Energieniveaus

Die Energieverschiebung ist:

$$\Delta E_{\text{Zee}} = \gamma B m = g_\ell B \mu_B m = 4,635 \times 10^{-24} \text{ J}$$

Dies entspricht einem Frequenzunterschied von:

$$\Delta f = \frac{\Delta E}{\hbar} = 6,9951 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Bei einer Frequenz $f = 4,65516 \times 10^{14} \text{ Hz}$ entspricht dies einem Wellenlängenunterschied von:

$$\Delta \lambda = \frac{c}{f + \Delta f} - \lambda = 0,009678 \text{ nm}$$



3b. Isotopieverschiebung

Ähnlich wie in der Aufgabe 1 ändert sich die reduzierte Masse im System. Die Energiedifferenz ist dann:

$$\Delta E = \left(\frac{1836}{1837} + \frac{3670}{3671} \right) E_{\text{Ryd}} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) = -0,000\,513\,703\text{ eV}$$

Dies konvertiere ich in einen Frequenzunterschied:

$$\Delta f = 1,24 \times 10^{11}\text{ Hz}$$

Der Übergang entspricht einer Frequenz von:

$$f = 4,567 \times 10^{14}\text{ Hz}$$

Und einer Wellenlänge von:

$$\lambda = 656\text{ nm}$$

Und einer Wellenlängendifferenz:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{f} \Delta f = 1,79 \times 10^{-10}\text{ m}$$

3c. Finesse

Der freie Spektralbereich sollte gerade die $6,9951 \times 10^9\text{ Hz}$ aus dem ersten Aufgabenteil sein. Die Finesse sagt eigentlich nur etwas über die Schärfe der Peaks aus, also $\Delta\lambda/\delta\lambda$. Dabei habe ich nur $\Delta\lambda/\lambda$.

4. Spin-Bahn-Kopplung und g_j -Faktor

4a. Komponenten und Digramme

Bei $\ell = 1$ ist die Länge des Drehimpulses $\sqrt{1(1+1)} = \sqrt{2}$. Mit $s = 1/2$ ist die Länge des Spins $\sqrt{3}/2$. Die z -Komponenten m_ℓ und m_s sind $-1, 0, 1$ bzw. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$. Der Polarwinkel θ mit der z -Achse ist dann gegeben als:

$$\cos(\theta_\ell) = \frac{m_\ell}{\sqrt{2}} = \pm 1, 0, \quad \cos(\theta_s) = \frac{m_s}{\sqrt{3}/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Die Winkel $90^\circ - \theta$ sind dann:

$$\theta_\ell = \pm 45^\circ, \quad \theta_s = \pm 35,2644^\circ$$

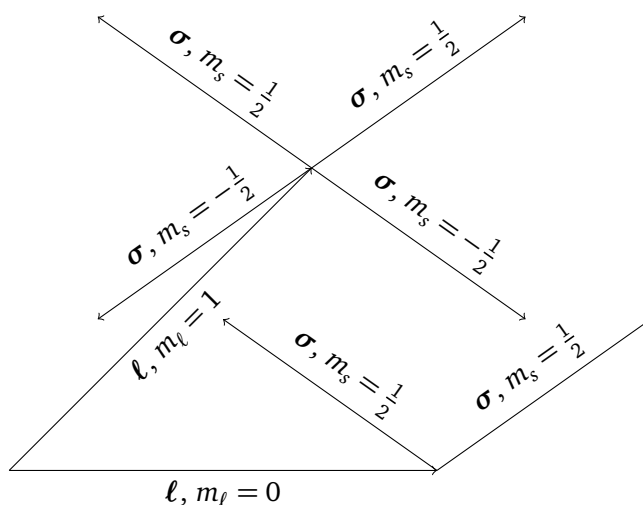


Abbildung 1: Alle Vektoren l und σ in einem Diagramm. Dabei habe ich die Fälle, in denen alle z -Komponenten umgekehrt sind, weggelassen, da sie letztlich das gleiche darstellen.

Alle signifikant verschiedenen Vektordiagramme, also solche, die nicht durch Spiegellung oder Drehung aus den anderen hervorgehen können, sind in den Abbildungen 2, 3, 4, 5, 6 und 7 gezeigt. In Abbildung 1 sind alle Vektoren l und σ gezeigt.



4b. Magnetische Momente

Für die magnetischen Momente gilt:

$$\mu_l = -\mu_B l, \quad \mu_s = -2\mu_B \sigma$$

Das magnetische Moment des Spins ist also im Vergleich zu den Drehmomenten doppelt so groß wie das magnetische Moment des Spins. Daher ist die vektorielle Summe μ_j auch anders als j .

In Abbildung 2 habe ich die magnetischen Momente eingetragen, das Resultat ist in Abbildung 8.

In dieser Abbildung ist dann auch zu sehen, dass $j \nparallel \mu_j$ gilt.



4c. Präzession von μ_j um j

Hier fehlen noch Inhalte.

4d. g -Faktoren

Hier fehlen noch Inhalte.

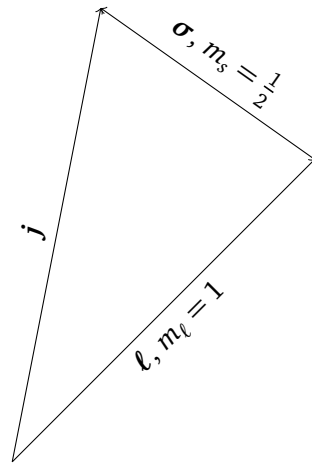


Abbildung 2: $m_l = 1$ und $m_s = \frac{1}{2}$

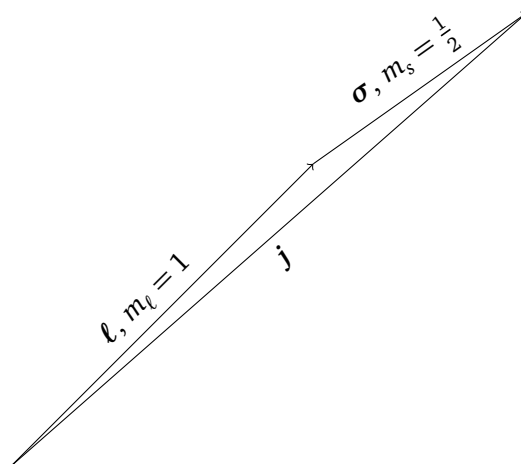


Abbildung 3: $m_l = 1$ und $m_s = \frac{1}{2}$

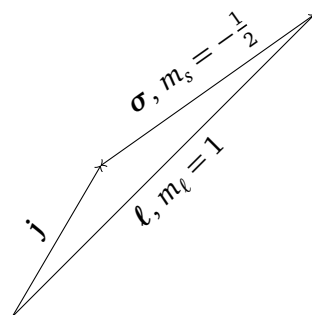


Abbildung 4: $m_l = 1$ und $m_s = -\frac{1}{2}$

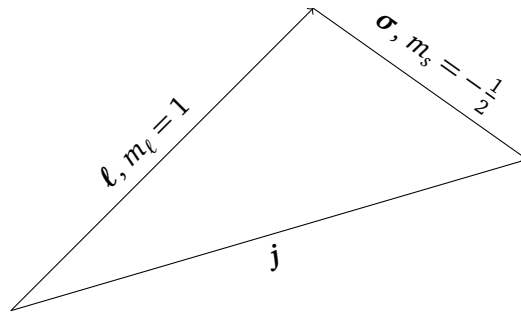


Abbildung 5: $m_\ell = 1$ und $m_s = -\frac{1}{2}$

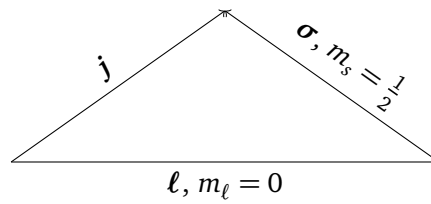


Abbildung 6: $m_\ell = 0$ und $m_s = \frac{1}{2}$

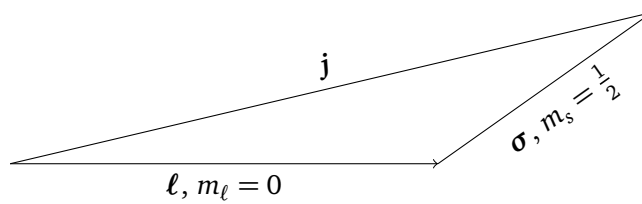


Abbildung 7: $m_\ell = 0$ und $m_s = \frac{1}{2}$

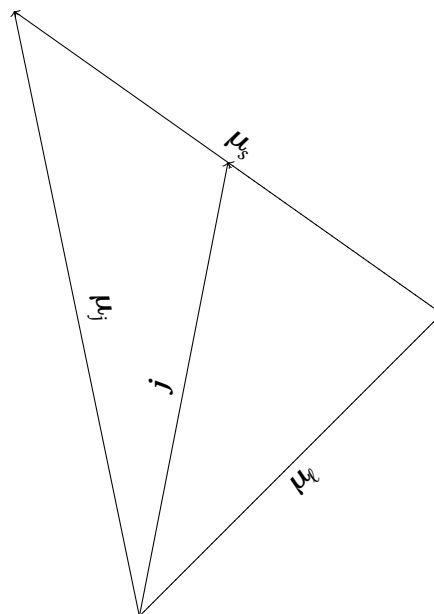


Abbildung 8: $m_\ell = 1$ und $m_s = \frac{1}{2}$

4e. externes Magnetfeld

Hier fehlen noch Inhalte.

