

Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf <http://martin-ueding.de/de/university/physik411/> gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]


physik411 – Übung 4

Gruppe 2 – Florian Seidler

Martin Ueding *

2013-05-07

Lizenz: CC-BY-SA 3.0 

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte	<input type="text"/> / 3	<input type="text"/> / 5	<input type="text"/> / 15	<input type="text"/> / 23 

1. Separation von Koordinaten

Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$E|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{\kappa}{r}, \quad \hat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$$

In Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Mit dem Separationsansatz $\psi(\mathbf{x}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ kann ich die Variable r separieren:

$$r^2 E - \kappa r - \frac{\partial}{\partial r} r^2 R'(r) = \frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \Theta'(\theta) + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \Phi''(\phi)$$

Und als letzten Schritt noch θ und ϕ :

$$\sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \Theta'(\theta) = -\Phi''(\phi)$$

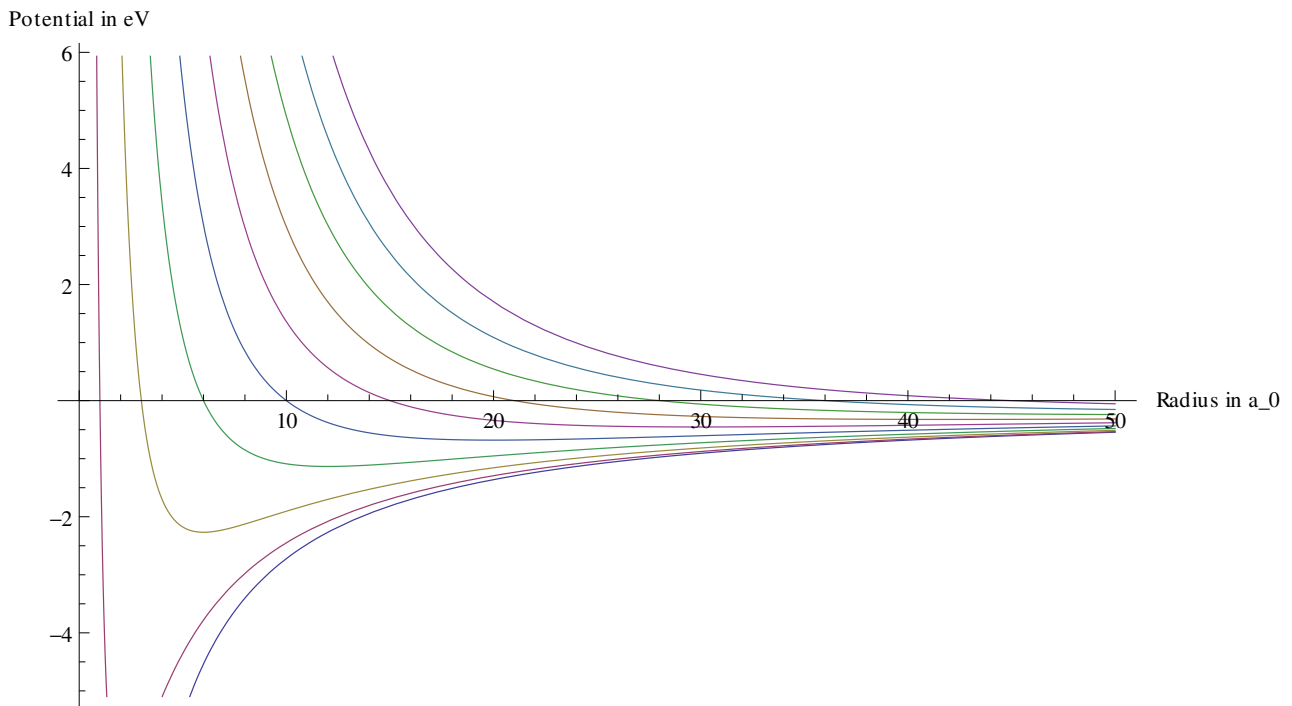


2. Kugelflächenfunktionen

Diese Aufgabe lasse ich aus.



*mu@uni-bonn.de

Abbildung 1: $V_{\text{eff}}(r, l)$ für $n = 1, \dots, 10$ und $l = n - 1$

3. Zirkulare Rydberg-Atome

3a. Effektives Potential und Kreisbahn

In der Vorlesung wurde folgende Formel gegeben:

$$V_{\text{eff}}(r, l) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V_{\text{Coul}}(r)$$

Dies setze ich ein:

$$V_{\text{eff}}(r, l) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m} \frac{1}{r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Mit $E_{\text{Ryd}} = e^2/(8\pi\epsilon_0 a_0)$ vereinfacht sich dies zu:

$$V_{\text{eff}}(r, l) = E_{\text{Ryd}} \left(l(l+1) \frac{a_0^2}{r^2} - 2 \frac{a_0}{r} \right)$$

Für einige l ist dies in Abbildung 1 dargestellt. Für $r \rightarrow 0$ divergiert das Potential gegen ∞ , für $r \rightarrow \infty$ konvergiert das Potential von unten gegen 0.

Eine Kreisbahn ist dann erreicht, wenn das Gesamtenergie (im Diagramm eine horizontale Linie) sich nur einmal mit dem Potential schneidet, also das Teilchen nur die minimale Energie hat. Dazu bestimme ich

Potential in eV

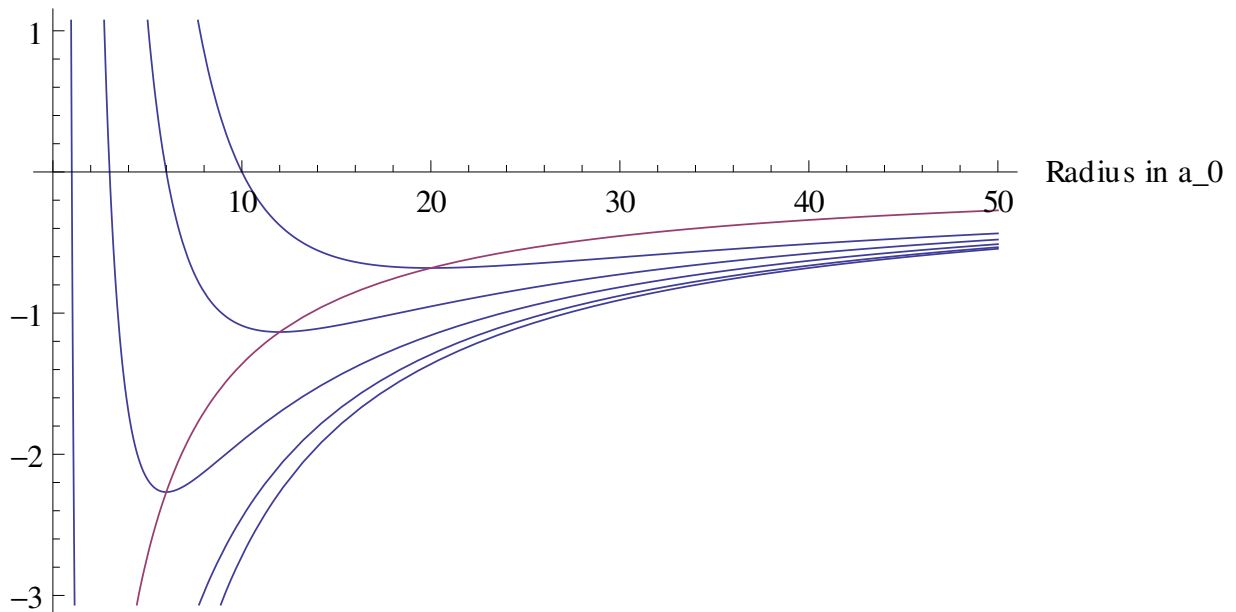


Abbildung 2: In blau: $V_{\text{eff}}(r)$ für $n = 1, \dots, 5$ und $l = n - 1$. In violett: Ortskurve der Minima.

das Minimum des Potentials:

$$r = l(l + 1)a_0$$

Dies löse ich nach l auf und setze es in $V_{\text{eff}}(r, l)$ ein, um die Ortskurve der Minima zu erhalten. Diese Ortskurve ist in [Abbildung 2](#) geplottet.



3b. Große n

Mit $l = n - 1$ ergibt sich $l(l + 1) \approx n^2$. Der Radius ist also $n^2 a_0$, wie schon oben hergeleitet.

Die Energie ist dann:

$$V_{\text{eff}}(r_{\text{zirk}}(n)) \approx -E_{\text{Ryd}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) = -\frac{1}{2} E_{\text{Ryd}} \frac{1}{n^2}$$



3c. Überlagerung

Für die Überlagerung betrachte ich zwei Zustände mit einer relativen Amplitude von $1/\sqrt{2}$. Die Energie im Zustand n , E_n , war in der Vorlesung angegeben mit $-E_{\text{Ryd}}/n^2$. Die Zeitabhängigkeit ist gerade $\exp(-iEt/\hbar)$, durch die Separation der Zeit mit Eigenwert E .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i(n - 1)\phi) \exp\left(i \frac{E_{\text{Ryd}}}{\hbar n^2} t\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i(n - 2)\phi) \exp\left(i \frac{E_{\text{Ryd}}}{\hbar (n - 1)^2} t\right)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte dazu ist:

$$\varrho(\phi, t) = 1 + \cos\left(\phi + \frac{E}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right) t\right)$$

Diese hat die Wellenzahl $k = 1$ und hat somit genau eine Mode. Da dieser Zustand dadurch entstanden sind, dass zwei Wellen, die sich durch eine Periode mehr unterscheiden haben, überlagert worden ist, entsteht eine Schwebung mit der Differenz der Frequenzen. Diese Differenz ist allerdings gerade eine Periode.

Die Kreisfrequenz ist:

$$\begin{aligned}\omega &= -\frac{E_{\text{Ryd}}}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \\ &= -\frac{E_{\text{Ryd}}}{\hbar} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 - 2n + 1}\right) \\ &= -\frac{E_{\text{Ryd}}}{\hbar} \frac{-2n + 1}{n^2 (n^2 - 2n + 1)} \\ &\approx \frac{2E_{\text{Ryd}}}{\hbar} n^3\end{aligned}$$



Klassisch wende ich wieder „Coulombanziehung wirkt als Zentripetalkraft“ an:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{r^2} = m\omega^2 r$$

Mit $r = a_0 n^2$:

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^3 n^6 m}} \\ &= \sqrt{\frac{E_{\text{Ryd}}}{2a_0^2 m} \frac{1}{n^3}}\end{aligned}$$



Es kommt also die gleiche Abhängigkeit von n heraus, allerdings ist der Vorfaktor ein anderer. Von den Einheiten kommt allerdings in beiden Fällen als Einheit rad s^{-1} heraus.

3d. Empfindlichkeit

In hohen n -Zuständen sind die Atome sehr empfindlich, weil die Energie von $1/n^2$ abhängt und so bei hohen n die Zustände sehr nah beieinander liegen. So sollten kleine E -Felder ausreichen, damit das Energieniveau geändert werden kann.

Ein homogenes elektrisches Feld, das überlagert wird, bedeutet ein lineares Potential, das überlagert wird. Dies ist in Abbildung 3 gezeigt.

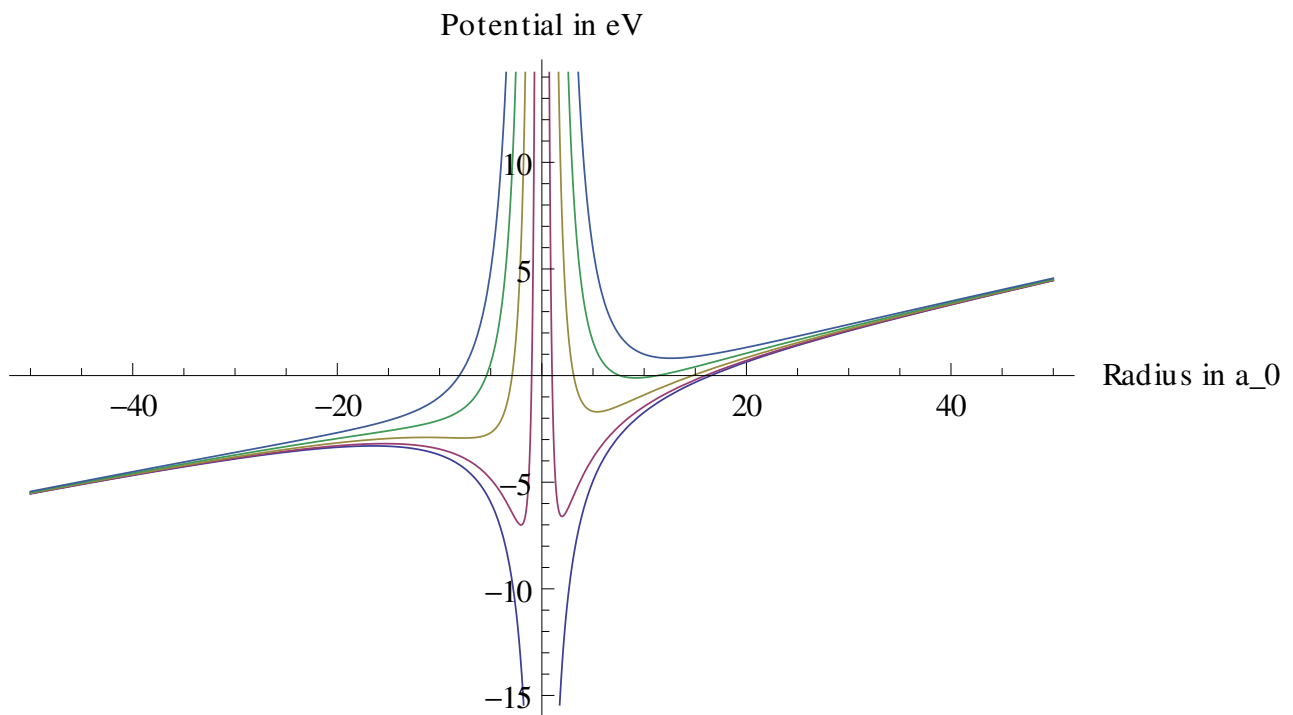


Abbildung 3: Überlagerung aus dem effektiven Potential und einem linearen Potential. Dabei wurde die r -Achse so gelegt, dass sie entlang dem überlagerten elektrischen Feld zeigt.

Damit das Atom ionisiert werden kann, muss das Elektron aus seiner Potentialmulde herausfallen können, es darf also kein lokales Minimum mehr geben. Ich betrachte also das Potential:

$$V(r, l) = E_{\text{Ryd}} \left(l(l + 1) \frac{a_0^2}{r^2} - 2 \frac{a_0}{r} \right) + E_{\text{Feld}} e r$$

Als nächstes würde ich die Nullstellen der Ableitung bestimmen. Wenn es für $r < 0$ keine Nullstellen mehr gibt, gibt es dort auch keine lokalen Minima mehr, das Elektron fällt also aus seiner Bahn heraus. Ich erhalte allerdings ein Polynom dritter Ordnung, bei dem die Nullstellenbestimmung nicht so einfach ist.

Diese Indikatorfunktion, bei deren Nullstellen lokale Extremstellen im Potential auftreten, habe ich für mehrere l pro Bild und für drei verschiedene Feldstärken in Abbildungen 4, 5 und 6 geplottet. Es ist zu sehen, dass ein starkes externes Feld diese Indikatorfunktion so weit herunterziehen kann, dass keine Nullstelle mehr auftaucht. Somit

Der Quelltext für diese Plots:

```
gradient[r_, l_, a0_, eryd_, efeld_, e_] :=
eryd (-2 l (l + 1) a0^2 + 2 a0 Abs[r]) + efeld e r^3
```

```
Manipulate[Plot[Evaluate[Table[gradient[r, n - 1, 1, 13.6, efeld, 1],
{n, 1, 5}]], {r, -30, 10},
AxesLabel -> {"Radius in a_0", "Indikatorfunktion"}], {efeld, 0, 1}]
```

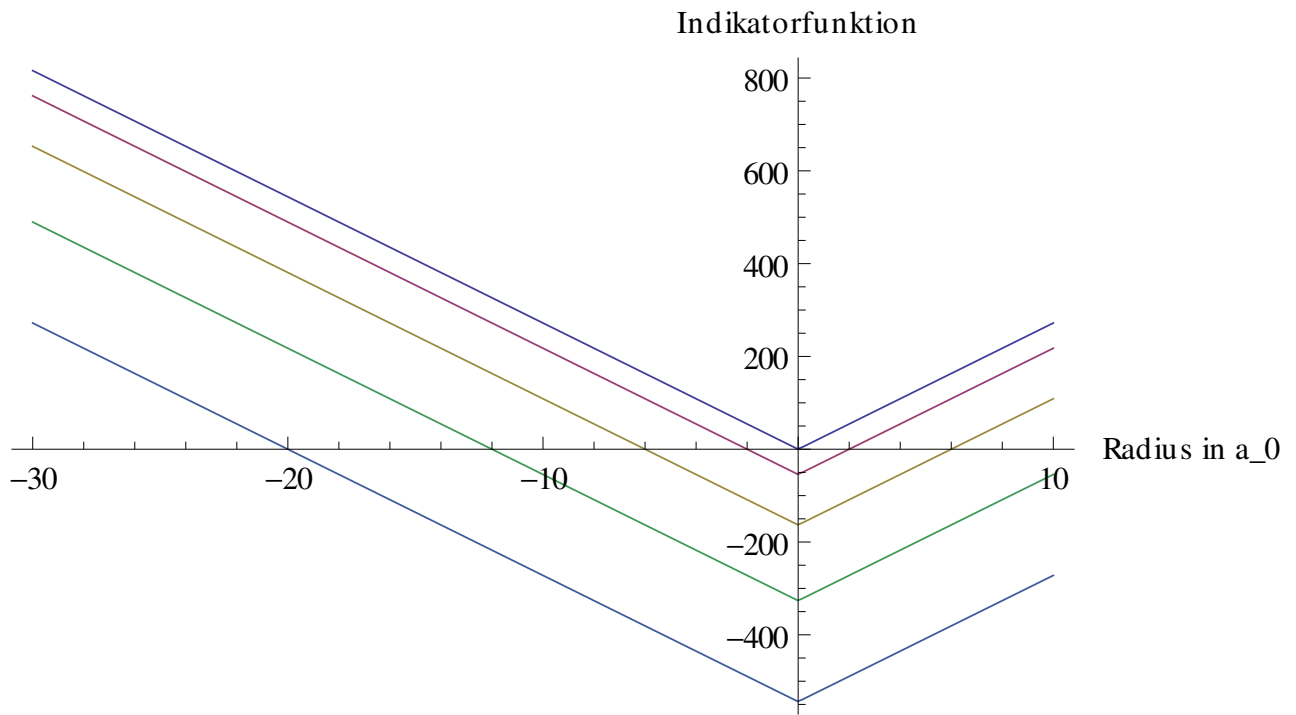


Abbildung 4: $E_{\text{Feld}} = 0$

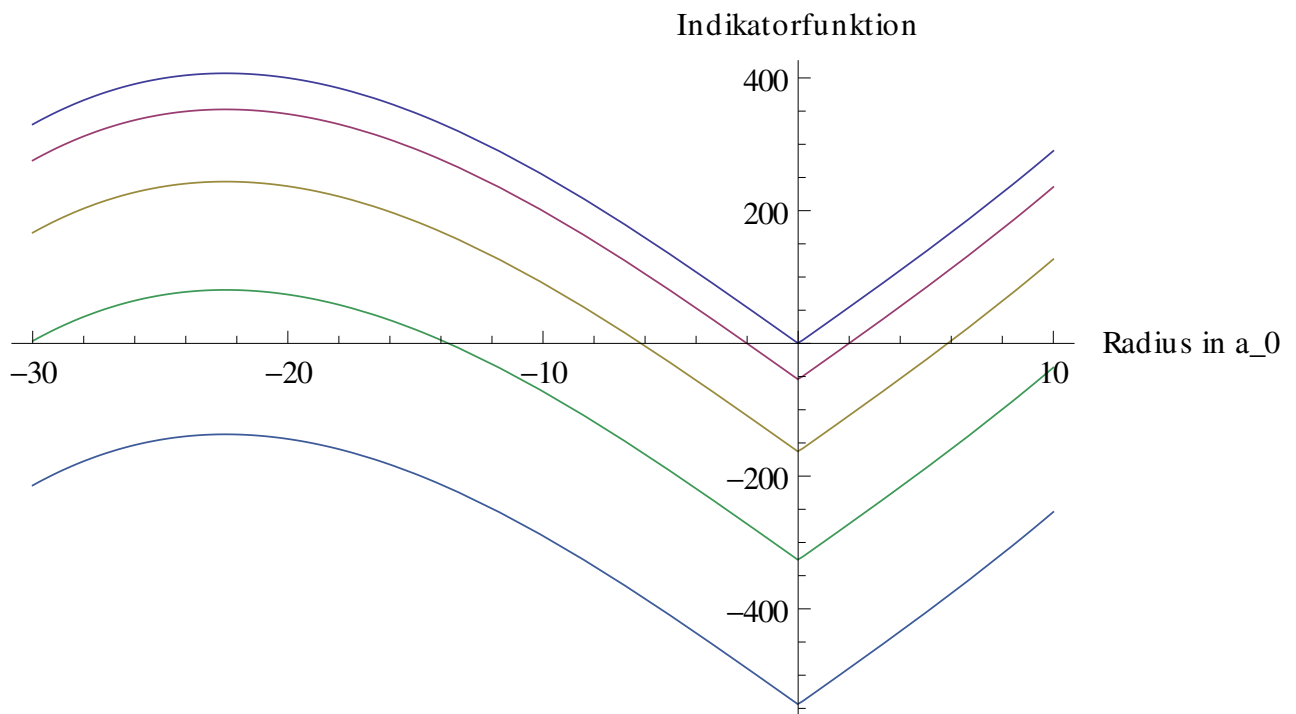


Abbildung 5: $E_{\text{Feld}} = 18$

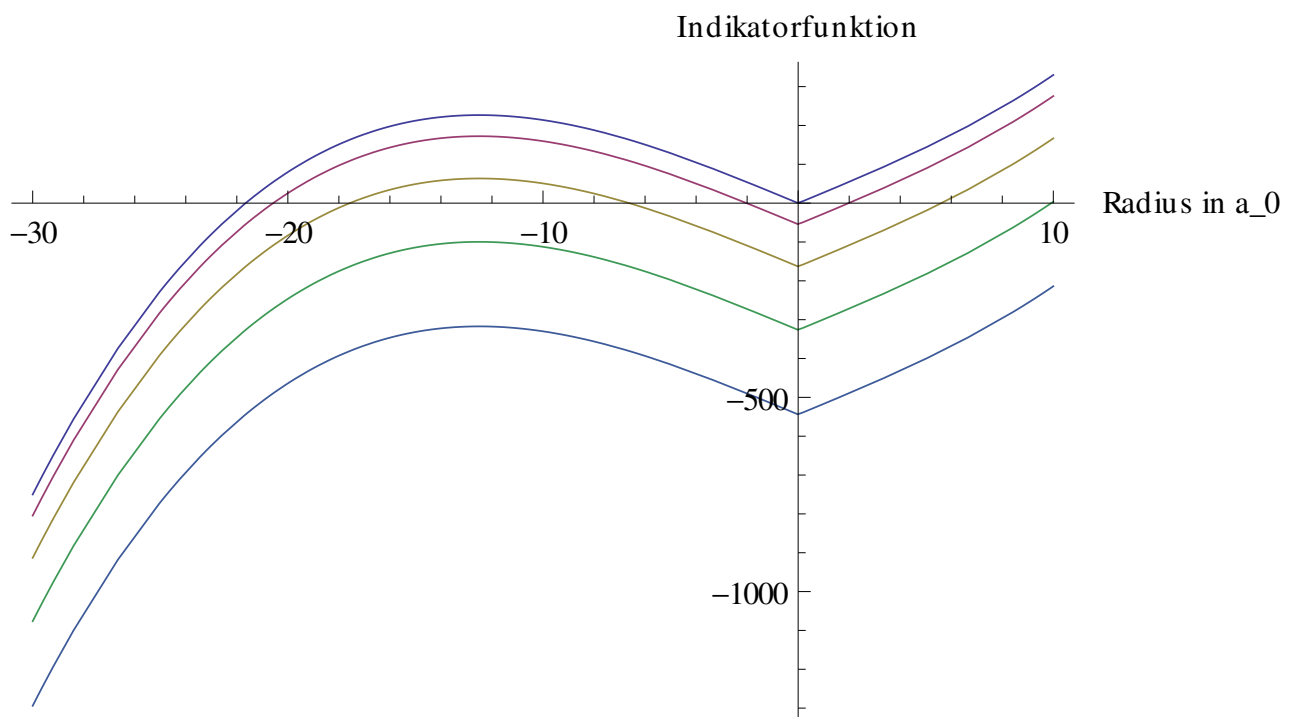


Abbildung 6: $E_{\text{Feld}} = 58$