

Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf <http://martin-ueding.de/de/university/physik411/> gefunden werden.

Sofern im Dokuments nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik411 – Übung 3

Gruppe 2 – Florian Seidler

Martin Ueding *

2013-05-01



Lizenz: CC-BY-SA 3.0

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	<input type="text"/> / 4	<input type="text"/> / 8	<input type="text"/> / 8	<input type="text"/> / 8	<input type="text"/> / 28

1. Photoeffekt

1a. Grenzwellenlänge

Es muss $\hbar\omega \geq U_A$ gelten. Nach f umgeformt bleibt:

$$f \geq \frac{U_A}{h} = 5,08 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Und die dazugehörige Wellenlänge:

$$\lambda \leq \frac{ch}{U_A} = 5,90 \times 10^{-7} \text{ m}$$



1b. Geschwindigkeit

Ich forme nach v um:

$$h \frac{c}{\lambda} - U_A = \frac{1}{2} m_e v^2 \implies v = 712000 \text{ m s}^{-1}$$

*mu@uni-bonn.de

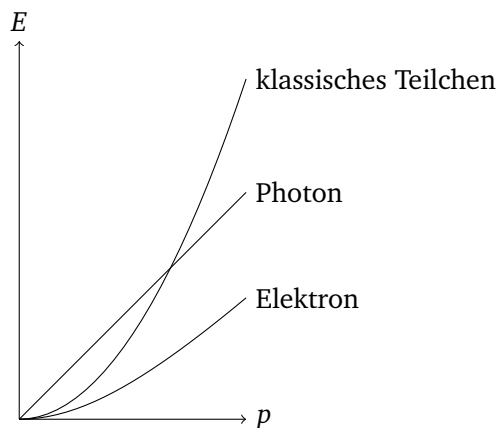


Abbildung 1: Plot für die verschiedenen Teilchen. Für diesen Plot habe ich $c = h = 1$ sowie für das Elektron $E_0 = m = 1$ gesetzt.

2. Energie-Impuls-Beziehungen und Comptonwellenlänge

2a. Diagramm

Die kinetische Energie für ein klassisches Teilchen ist $E_{\text{kin}} = p^2/(2m)$. Für ein relativistisches Teilchen mit Ruhemasse E_0 ist die Gesamtenergie E : $E^2 = E_0^2 + c^2 p^2$. Dabei ist die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \sqrt{E_0^2 + c^2 p^2} - E_0$$

Für ein Photon ist $E_0 = 0$. In Abbildung 1 sind die verschiedenen Formeln mit frei gewählten Parametern geplottet. In Abbildung 2 das ganze mit den richtigen Zahlenwerten, allerdings weniger übersichtlich.

Für kleine Impulse sind die relativistische und die klassische Formel sehr nah beieinander, wie zu erwarten ist.

2b. Compton-Wellenlänge

Die Wellenzahl k zur Compton-Wellenlänge ist:

$$k_C = \frac{2\pi}{\lambda_C} = 2,84 \times 10^{12} \text{ rad m}^{-1}$$

Der Impuls dazu ist:

$$p_C = \hbar k_C = 3,00 \times 10^{-22} \text{ kg m s}^{-1}$$



Und die Energie:

$$E_C = c p_C = 2,99 \times 10^{-22} \text{ J} = 0,561 \text{ MeV}$$

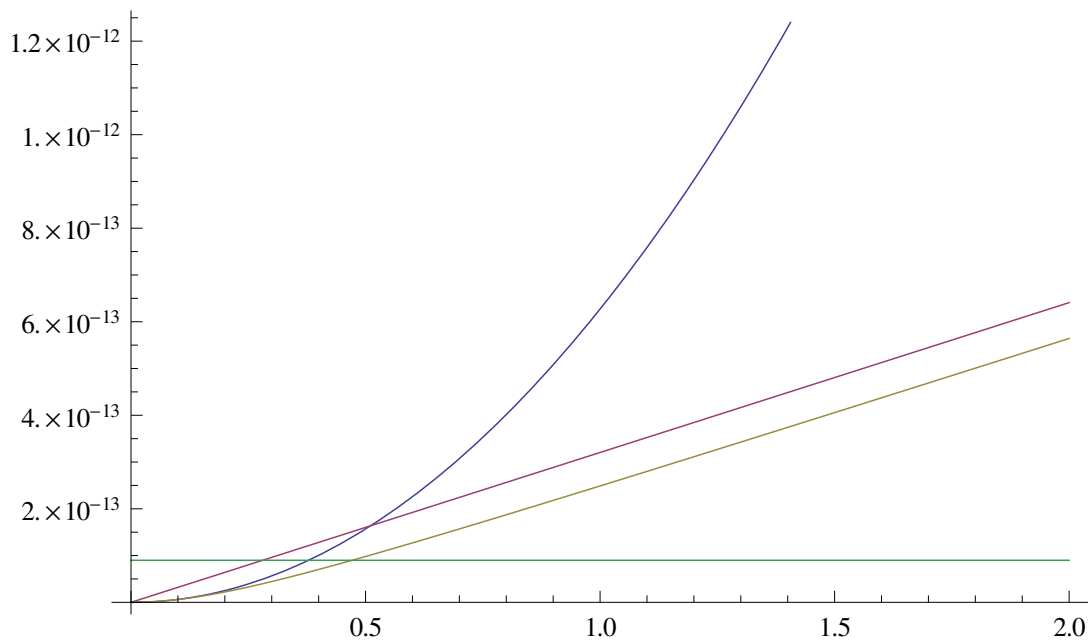


Abbildung 2: Plot der Energien für verschiedene Teilchen. In blau ist das klassische Elektron, in violett das Photon und in gelb das Elektron. In grün die Energie des Photons zur Compton-Wellenlänge. Auf der Ordinate ist der Impuls p in MeV/c , auf der Abszisse die kinetische Energie E in J .

Den Wert für p_C habe ich nicht in Abbildung 2 eingezeichnet, da ich nicht weiß, wie in Mathematica eine vertikale Linie eingefügt wird. Sie sollte aber bei 0,56 liegen.



3. Atomares Magnetfeld, Kernmoment und Hyperfeinstruktur

3a. Magnetfeld am Ort des Protons

Das Gesetz von Biot-Savart ist:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \tag{1}$$

Ich nehme an, dass das Elektron wie eine Ringladung um das Proton verteilt ist, damit ich ein zeitlich konstantes Magnetfeld erhalte.

$$\rho(r, \phi, z) = \frac{e}{2\pi a_0} \delta(r - a_0) \delta(z)$$

Mit dem Ansatz „Coulomb-Anziehung wirkt als Zentripetalkraft“ erhalte ich die Geschwindigkeit:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0^2} = m_e \frac{v_0^2}{a_0} \iff v_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0 m_e}}$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_0 \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Somit ist die Stromdichte:

$$\mathbf{j}(r, \phi, z) = \rho(r, \phi, z) \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

Dies setze ich in (1) ein:

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\infty} dr' r' \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{0} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{0} - \mathbf{x}'|}$$

Das Integral über r' führe ich aus. Dadurch werden nur alle r' auf a_0 gesetzt. Außerdem schreibe ich die Vektoren aus.

$$\begin{aligned} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{2\pi} d\phi' a_0 \frac{e}{2\pi a_0} \delta(z) v_0 \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \frac{\mathbf{x}'}{a_0} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{2\pi a_0} v_0 \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{\mathbf{e}}_{\phi'} \times \begin{pmatrix} a_0 \cos(\phi') \\ a_0 \sin(\phi') \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt liefert gerade -1 .

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e}{2\pi} v_0 \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{\mathbf{e}}_z$$

Da nichts mehr von ϕ' abhängt, liefert diese Integration nur noch einen Faktor 2π .

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} e v_0 \hat{\mathbf{e}}_z \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} e^2 \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a_0 m_e}} \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

Das Magnetfeld zeigt also – wie mit der rechten-Hand-Regel auch anschaulich zu sehen – senkrecht zur Rotationsebene nach oben.

Von den Einheiten haut dies allerdings nicht hin, ich muss noch mit a_0^{-2} multiplizieren, damit als Einheit Tesla herauskommt. Dann ist der Wert:

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = 12,5 \text{ T}$$



Wenn die Coulomb-Kraft zwischen zwei Nukleonen 150 N ist, dann ist ein derart starkes Magnetfeld nicht weiter verwunderlich.

3b. Magnetisches Dipolmoment

Für den Drehimpuls gilt:

$$L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m_p r_p v_p \hat{\mathbf{e}}_z = \underbrace{m_p r_p^2}_{\Theta_p} \boldsymbol{\omega} \stackrel{!}{=} \frac{\hbar}{2} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Ich gehe davon aus, dass die Ladungsdichte ein dünner Ring um das Zentrum ist. Der Strom durch eine $\hat{\mathbf{e}}_z \wedge \hat{\mathbf{e}}_\rho$ Ebene ist:

$$I = e \frac{\omega}{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Dies muss der Fall sein, weil die Integration nach der Zeit t um eine ganze Periode gerade die Ladung e geben muss:

$$Q = \int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} dt I = e$$

Das magnetische Moment ist:

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{x} \times d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \int_0^{2\pi} d\phi r_p \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{2} e \frac{\omega}{2\pi} r_p^2 \int_0^{2\pi} d\phi \hat{\mathbf{e}}_z = \frac{1}{2} e \omega r_p^2 \hat{\mathbf{e}}_z$$

Nun soll gerade $L = \hbar \hat{\mathbf{e}}_z / 2$ sein. Daher:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\hbar}{2m_p r_p^2} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Somit ist das magnetische Moment:

$$\boldsymbol{\mu}_p = \frac{e\hbar}{4m_p} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Nun noch einen Zahlenwert:

$$\mu_p = 2,53 \times 10^{-27} \text{ A m}^2$$



3c. Hyperfeinstruktur

Die Energiedifferenz ist:

$$\Delta E = 2Bm = 6,32 \times 10^{-26} \text{ J}$$

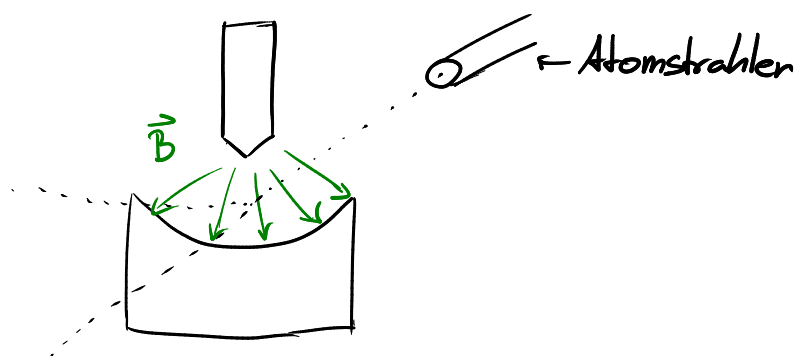


Abbildung 3: Aufbau des Stern-Gerlach-Experiments

Die Frequenz dazu ist:

$$\nu_{\text{HFS}} = \frac{\Delta E}{h} = 9,54 \times 10^7 \text{ Hz}$$

Mit einem Faktor 5,6 multipliziert ergibt dies gerade mal 530 MHz, und nicht die benötigten 1,4 GHz. Da fehlt also noch gut ein Faktor 2,5 irgendwo.



4. Stern-Gerlach-Versuch

4a. Skizze

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3 gezeigt.



Man wählt eine derartige Feldkonfiguration, damit es ein inhomogenes Feld und somit ein $\frac{dB}{dz} \neq 0$ gibt. Ein homogenes Magnetfeld übt auf einen Dipol ausschließlich ein Drehmoment aus. Für die Beobachtbarkeit ist es allerdings wichtig, dass auch eine Kraft auf den Schwerpunkt ausgeübt wird, dies geht nur mit einem inhomogenen Magnetfeld.

4b. Ablenkende Kraft

Die potentielle Energie ist $V = -\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{B} \rangle$. Der negative Gradient gibt die Kraft:

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \nabla \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{B} \rangle$$

Unter der Annahme, dass das Magnetfeld nur entlang der z -Richtung variiert und $\boldsymbol{\mu}$ konstant ist, erhalte ich:

$$F_z = \left\langle \boldsymbol{\mu}, \frac{d\mathbf{B}}{dz} \right\rangle$$

Nach der klassischen Physik wäre zu erwarten, dass die magnetischen Momente $\boldsymbol{\mu}$ thermisch verteilt sind, also im Mittel $\mathbf{0}$ und isotrop. Daher sollte die Ablenkung, die proportional zu $\boldsymbol{\mu}$ ist, im Mittel null sein. Auf

dem Schirm ist ein (eventuell Gaußscher) Peak zu erwarten.

Im Experiment zeigen sich allerdings zwei Peaks. Daher gibt es für das magnetische Moment nur zwei mögliche Zustände: $\mu = \pm |\tilde{\mu}|$. Diese können allerdings isotrop im Raum verteilt sein. Damit wird das Vorzeichen eigentlich auch nicht gebraucht, weil es nur einer Rotation um π rad entspricht.



4c. Magnetisches Moment der Atome

Die Kraft F_z wirkt für die Zeit, die das Teilchen braucht, um den Magnet zu passieren:

$$t = \frac{l_1}{v_x}$$

In dieser Zeit wirkt die Beschleunigung $a_y = F_z/M$. Somit ist die Auslenkung direkt hinter dem Magneten:

$$d_z = \frac{1}{2} a_z t^2$$

Danach fliegt das Atom noch eine Zeit $t_2 = l_2/v_x$ mit der Geschwindigkeit $v_z = a_z t_2$. Das gemessene δ_z ist das Doppelte der Kombination aus diesen beiden Termen.

Zusammen mit der Kraft also:

$$\frac{\delta_z}{2} = \frac{\left\langle \mu_z \frac{dB}{dz} \right\rangle}{M} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{v_x} \right)^2 + \frac{l_1 l_2}{v_x^2} \right)$$

Umgeformt:

$$\mu_z = \frac{\delta_z M}{2 \frac{dB}{dz}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{v_x} \right)^2 + \frac{l_1 l_2}{v_x^2} \right)^{-1} = 9,323 \times 10^{-23} \text{ A m}^2$$



Von den Einheiten her stimmt dies, allerdings ist dies deutlich größer als das magnetische Moment des Protons, das in Aufgabe 3 bestimmt worden ist.