Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/physik411/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik411 – Übung 2

Gruppe 2 – Florian Seidler

Martin Ueding *

2013-04-24

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte	/ 4	/ 4	/ 11	/ 10	/ 29

1. Quanteneffizienz einer Photodiode

Mit der Photonenzahl m und der Elektronenzahl n:

$$S_\lambda = \frac{I}{P} = \frac{I\lambda t}{mhc} = \frac{Q\lambda}{mhc} = \frac{ne\lambda}{mhc} \iff \frac{n}{m} = \frac{S_\lambda hc}{e\lambda} \implies \frac{n}{m} = 0{,}904$$

Also 90,4 % der eintreffenden Photonen lösen ein Elektron aus.

2. Unschärferelation im Kastenpotential

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \iff \Delta p \geq \frac{\hbar}{2a} \iff \Delta v \geq \frac{\hbar}{2am} \iff (\Delta v)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4a^2m^2} \iff \Delta E = \frac{1}{2}m(\Delta v)^2 \geq \frac{\hbar^2}{8a^2m}$$

Auf dem vorherigen Aufgabenblatt habe ich die Energie nicht richtig bestimmt, daher benutze ich die Formel aus der Vorlesung [Meschede, 2013, Seite 6]:

$$E_l = \frac{\hbar^2\pi^2}{8a^2m}(l+1)^2$$

Für den Grundzustand $l = 0$ unterscheidet sich dies um einen Faktor π^2.

*mu@uni-bonn.de

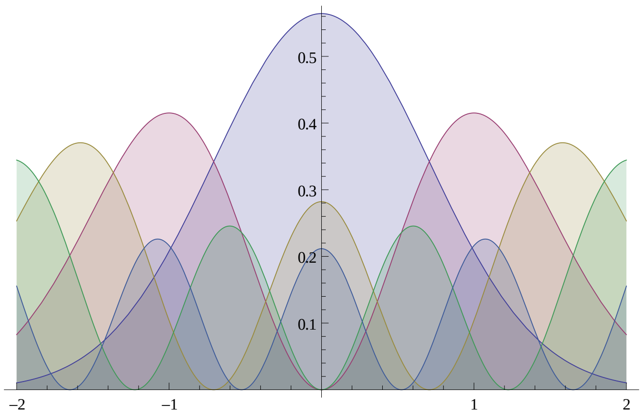

Abbildung 1: Plot von $\left|\Psi_n(x,t)\right|^2$ für $n = 0, \ldots, 3$. Horizontale Achse ist x, vertikale Achse ist die Wahrscheinlichkeitsdichte.

3. Quasiklassische Zustände im harmonischen Oszillator

3a. Aufenthaltswahrscheinlichkeit

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist:

$$\left|\Psi(x,t)\right|^2 = \frac{1}{x_0 2^n n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} H_n^2\left(\frac{x}{x_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

Allerdings hängt dies nicht mehr von der Zeit t sondern nur noch vom Ort x ab. Somit ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit als Funktion der Zeit t nur eine konstante Funktion. Und dies kann es wohl nicht sein, oder?

Für verschiedene n ist $\left|\Psi_n(x,t)\right|^2$ in Abbildung 1 geplottet.

3b. Überlagerungszustand

Zuerst schaue ich, ob die Wellenfunktion Ψ_0 schon normiert ist:

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_0 \middle| \Psi_0 \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{x_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \, \exp\left(-x'^2\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ψ_0 ist also schon normiert. Ich gehe davon aus, das die restlichen Ψ_n auch schon normiert sind.

Nun betrachte ich die Überlagerung:

$$|\Phi\rangle = |\Psi_0\rangle + \epsilon |\Psi_1\rangle$$

Für den Zustand $|\Phi\rangle$ bestimme ich nun die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned}
|\Phi(x,t)|^2 &= \Phi^*(x,t)\Phi(x,t) \\
&= \left(\Psi_0^*(x,t) + \epsilon\Psi_1^*(x,t)\right)\left(\Psi_0(x,t) + \epsilon\Psi_1(x,t)\right) \\
&= \Psi_0^*(x,t)\Psi_0(x,t) + \epsilon\Psi_0^*(x,t)\Psi_0(x,t) + \epsilon\Psi_1^*(x,t)\Psi_1(x,t) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\
&= \Psi_0^*(x,t)\Psi_0(x,t) + \epsilon\Psi_1^*(x,t)\Psi_0(x,t) + \epsilon\Psi_0^*(x,t)\Psi_1(x,t) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \\
&= \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \frac{\epsilon}{x_0\sqrt{\pi}}\frac{2x}{x_0}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\left(\exp\left(-\mathrm{i}(0-1)\omega t\right) + \exp\left(-\mathrm{i}(1-0)\omega t\right)\right) \\
&= \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \frac{\epsilon}{x_0\sqrt{\pi}}\frac{4x}{x_0}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\left(\frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) + \frac{\epsilon}{x_0\sqrt{\pi}}\frac{4x}{x_0}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\right)\cos(\omega t)$$

Der erste Summand ist einer ungerade Funktion, somit verschwindet das Integral. Es bleibt der zweite Summand.

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\frac{\epsilon}{x_0\sqrt{\pi}}\frac{4x}{x_0}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\cos(\omega t) \\
&= \frac{4\epsilon}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\frac{x^2}{x_0^2}\exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

Substituiere $x' := x/x_0$.

$$= \frac{4\epsilon x_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, x'^2\exp\left(-x'^2\right)\cos(\omega t)$$

Wende das gegebene Integral an.

$$= 2\epsilon x_0\cos(\omega t)$$

Die Teilchenposition verschiebt sich nun periodisch etwas zur Seite, wie auch in Abbildung 3 zu sehen ist.

3c. Plot

In den Abbildungen 2, 3 und 4 ist die Zeitentwicklung von $\rho_i(x,t) := |\Phi_i(x,t)|^2$ geplottet, auf der horizontalen Achse x und auf der vertikalen Achse t. Die Farbe gibt ρ an.

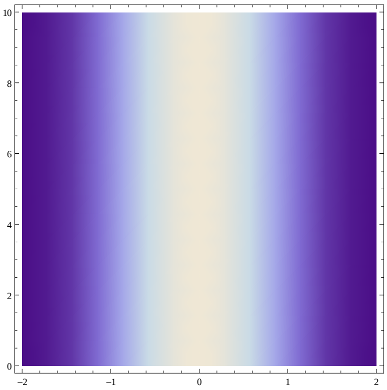

Abbildung 2: Dichte ρ_0

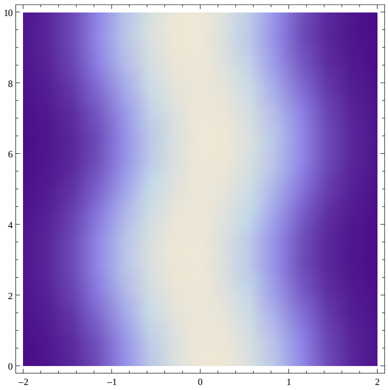

Abbildung 3: Dichte ρ_1

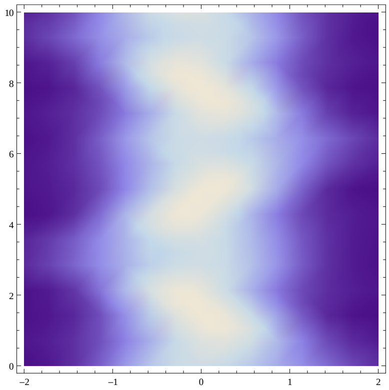

Abbildung 4: Dichte ρ_3

In Abbildung 2 ist $\left|\Phi_0\right\rangle = \left|\Psi_0\right\rangle$, in Abbildung 3 ist $\left|\Phi_1\right\rangle = \left|\Psi_0\right\rangle + 0{,}1\left|\Psi_1\right\rangle$ geplottet. Und in Abbildung 4 $\left|\Psi_3\right\rangle := \left|\Psi_0\right\rangle + 0{,}1\left|\Psi_1\right\rangle + 0{,}1\left|\Psi_2\right\rangle + 0{,}1\left|\Psi_3\right\rangle$.

Die Plots habe ich mit folgendem Mathematica Code erzeugt:

```
x0 := Sqrt[h/(m omega)]
m := 1
h := 1
omega := 1

psi[x_, t_, n_] := 1/Sqrt[x0 2^n Factorial[n]] Pi^(-1/4) HermiteH[n, x/x0]
Exp[-x^2/(2 x0^2)] Exp[-I (n + 1/2) omega t] Plot[Abs[psi[x, 0, 0]]^2,
{x, -2 x0, 2 x0}]

Plot[Evaluate[Table[Abs[psi[x, 0, n]]^2, {n, 0, 4}]], {x, -2 x0, 2 x0},
Filling -> Axis]

Manipulate[DensityPlot[Abs[psi[x, t, 0] + eps1 psi[x, t, 1]
+ eps2 psi[x, t, 2] + eps3 psi[x, t, 3]]^2, {x, -2 x0, 2 x0}, {t, 0, 10},
AxesLabel -> {"x", "t", "rho"}, PerformanceGoal -> Quality],
{eps1, 0, 0.1}, {eps2, 0, 0.1}, {eps3, 0, 0.1}]
```

Dieses Teilchen verhält sich wie mehrere Teilchen, die zusammen eine Schwebung erzeugen. Das Maximum wandert schon fast chaotisch in Abbildung 4. Ein klassischer harmonischer Oszillator hat nur eine Eigenfrequenz und kann sich nicht derart überlagern. Erst, wenn mehrere Massen eingebracht werden, kann es zu Schwebungen kommen.

4. Das Wasserstoffatom, klassisch betrachtet

4a. kinetische, potentielle und gesamte Energie

Vom statischen Bezugssystem aus gesehen muss für eine Kreisbahn die benötigte Zentripetalkraft durch die elektrische Anziehung geliefert werden:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}$$
$$\frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$
$$E_{\text{kin}}(r) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$
$$E_{\text{kin}}(r) = 1{,}154\times10^{-28}\,\text{J}\,\text{m}\cdot\frac{1}{r}$$

Die potentielle Energie ist für $\lim_{r\to\infty} E_{\text{pot}}(r) = 0$:

$$E_{\text{pot}}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$
$$E_{\text{pot}}(r) = -2{,}307\times10^{-28}\,\text{J}\,\text{m}\cdot\frac{1}{r}$$

Zusammen ist die Energie:

$$E(r) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$
$$E(r) = -1{,}154\times10^{-28}\,\text{J}\,\text{m}\cdot\frac{1}{r}$$

4b. Umlaufradius und Bahngeschwindigkeit

$$E(r) = -13{,}6\,\text{eV} \implies r = 5{,}29\times10^{-11}\,\text{m}$$

Dies deckt sich gut mit dem Atomdurchmesser von 10^{-10} m.

Die Bahngeschwindigkeit erhalte ich mit:

$$E_{\text{kin}}(r) = 1/2 m_e v^2 \implies v = 2{,}19\times10^{6}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

4c. Abgestrahlte Energie

$$\beta = 0{,}007\,30,\quad \gamma = 1{,}000\,03,\quad \Delta E = 2446\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} = 7{,}090\times10^{-24}\,\text{J}$$

Mit einer Energie von $|E| = 13{,}6\,\mathrm{eV}$ gibt es $n = 307\,000$ Umläufe, bevor die komplette Energie verbraucht ist. Die Zeit t, die für diese n Umläufe gebraucht wird, ist:

$$t = \frac{2n\pi r}{v} = 4{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{s}$$

Also auf einer sehr kleinen Zeitskala, im Vergleich zum Alter der Erde, würden die Elektronen ihre komplette Energie abstrahlen und auf den Kern fallen. Die Atome würden dann eventuell zu puren Neutronen fusionieren und die Erde würde erstmal zu einem Neutronenstern. Jedenfalls stimmt dies absolut nicht mit der Beobachtung überein.

4d. Dilemma

Die Lösung, die zur Quantenmechanik geführt hat, ist der Vorschlag, dass Elektronen auf ihren Bahnen um das Atom einfach keine Bremsstrahlung abgeben.

Es könnte auch sein, dass die Elektronen im thermischen Gleichgewicht mit allen anderen Atomen stehen und sich so der Strahlungsverlust ausgleicht. Allerdings sind wohl im Universum auch einzelne Atome, so dass diese vielleicht kollabieren. Keine wirkliche Lösung.

Literatur

[Meschede, 2013] Meschede, D. (2013). physik411 Vorlesung 2013-04-18.