Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik411.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik411/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik411 – Übung 1

Gruppe 2

Martin Ueding

mu@uni-bonn.de

2014-07-07

Symbolerklärung: Nabla $\boldsymbol{\nabla}$, Laplace $\triangle$, d'Alambert $\square$, Delta Δ und $\triangle$, Vektor $\boldsymbol{v}$, Tensor $\boldsymbol{T}$.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	/ 8	/ 12	/ 5	/ 9	/ 9	/ 43

1. Moleküle zählen

1a. Wasserglas

1 mol Wasser wiegt 18 g. Dort drin sind $6{,}02 \times 10^{23}$ Moleküle enthalten. Das Volumen ist 18 ml. Im ganzen Glas sind also $6{,}69 \times 10^{24}$ Moleküle enthalten. Da 0,2 l nur eine signifikante Stelle hat, ist meine Antwort 7×10^{24} Moleküle.

1b. Markierung

Zuerst schätze ich ab, welche Wassermenge der Planet hat. Dazu nehme ich an, dass, wenn man die Meere gleichmäßig verteilt, sie eine Tiefe von vielleicht 1000 m haben. Das Volumen ist dann:

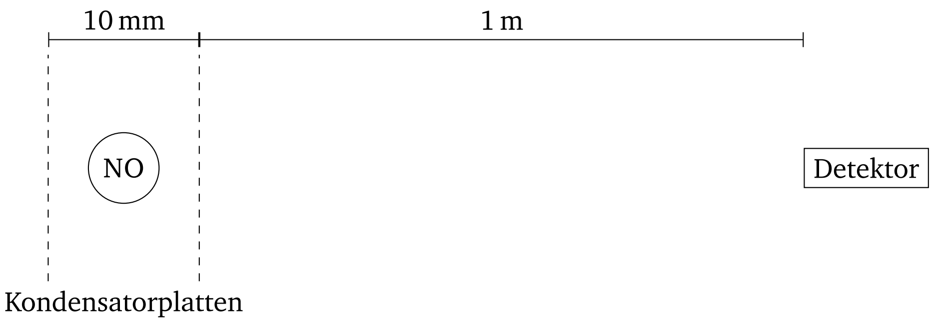
$$V = 4\pi R_\mathrm{E}^2 \cdot 1000\,\mathrm{m} = 5{,}15 \times 10^{17}\,\mathrm{m}^3$$

Geteilt durch die $18\,\mathrm{ml/mol} = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$ erhalte ich eine Stoffmenge von $2{,}86 \times 10^{22}$ mol, was $1{,}72 \times 10^{46}$ Teilchen entspricht.

Im Meer ist jetzt ein Anteil von $3{,}89 \times 10^{-22}$ Markiert. Wenn ich jetzt wieder $6{,}69 \times 10^{24}$ Moleküle auswähle, dann ist der Erwartungswert 2600 markierte Moleküle im Glas.

2. Flugzeit-Massenspektrometer

2a. Skizze



2b. Flugzeit für $^{14}N^{16}O$

Die Masse des Isotops ist $30\,\mathrm{u} = 4{,}98 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Das Ion legt eine Potentialdifferenz von 500 V zurück (mittig im Kondensator), es bekommt also $500\,\mathrm{eV} = 8{,}05 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}$ Energie. Mit $E_{\mathrm{kin}} = mv^2/2$ erhalte ich eine Geschwindigkeit von $v = 56\,800\,\mathrm{m/s}$. Da die Ruhemasse im Bereich von MeV liegt, darf ich an dieser Stelle klassisch rechnen. Mit dieser Geschwindigkeit v legen die Ionen die Strecke von $L = 1\,\mathrm{m}$ in $t = 1{,}76 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$ zurück.

Dabei habe ich die Beschleunigungszeit nicht berücksichtigt. Das Ion beschleunigt innerhalb von $d/2 = 5\,\mathrm{mm}$ auf die Geschwindigkeit v. Mit $v^2 = 2ad/2$ erhalte ich eine Beschleunigung von $a = 3{,}23 \times 10^{11}\,\mathrm{m/s^2}$. Die Zeit, um diese Strecke zurück zu legen erhalte ich mit $d/2 = a\tilde{t}^2/2$: $\tilde{t} = 1{,}76 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$. Der relative Fehler ist also 0,01.

2c. Flugzeitverbreiterung

Für die Flugzeitverbreiterung betrachte ich zwei Ionen, die an beiden Enden des Wechselwirkungsgebietes gestartet sind. Die Ionen bekommen nun als Energie:

$$E_\pm = \frac{\frac{d}{2} \pm \frac{\Delta x}{2}}{d} eU_0$$

Diese Energien sind:

$$E_+ = 8{,}13 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}, \quad E_- = 7{,}96 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}$$

Mit den eben benutzten Formeln errechne ich die Flugzeit für beide Ionen aus:

$$t_+ = 1{,}750\,56 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}, \quad t_- = 1{,}768\,15 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$$

Die Zeitauflösung ist also maximal $1{,}759 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$, wenn die endliche Größe des Wechselwirkungsgebietes berücksichtigt wird. Nun berechne ich die Flugzeit für die verschiedenen Isotope, wenn sie aus der Mitte des Kondensators starten:

Isotop	Masse / u	Flugzeit t / s
$^{14}N^{16}O$	30	$1{,}759\,29 \times 10^{-5}$
$^{15}N^{16}O$	31	$1{,}788\,37 \times 10^{-5}$
$^{14}N^{18}O$	32	$1{,}816\,89 \times 10^{-5}$

Die Werte unterschieden sich mehr als 2×10^{-7} s, so dass eine Unterscheidung möglich ist, wenn auch knapp.

3. Mittlere freie Weglänge

3a. Zimmerumgebung

Gesucht ist die mittlere freie Weglänge l. Dazu stelle ich die Gasgleichung um:

$$pV = Nk_\mathrm{B}T \iff p = nk_\mathrm{B}T \iff n = \frac{p}{k_\mathrm{B}T}$$

Die mittlere freie Weglänge l ist:

$$l = \frac{1}{n\sigma} \iff l = \frac{k_\mathrm{B}T}{p\sigma} \implies l = 1{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Die Teilchendichte ist $n = 2{,}50 \times 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$. Der mittlere Abstand a zwischen den Teilchen ist dann:

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}} = 3{,}42 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

Dieser Abstand ist um zwei Größenordnungen kleiner als die mittlere freie Weglänge. Dies liegt daran, dass der Wirkungsquerschnitt bei diesem Abstand einen kleinen Raumwinkel einnimmt.

3b. Evakuieren

Die gesuchte Teilchendichte ist $n = 1/l\sigma$. Nach der Gasgleichung ist dies auch gleich $p/k_\mathrm{B}T$. Nach p aufgelöst:

$$p = \frac{k_\mathrm{B}T}{l\sigma} = 10\,\mathrm{mPa}$$

4. De Broglie-Wellenlängen

4a. Energie $10\,\mathrm{eV}$

Die Energie-Impuls-Relation besagt mit Gesamtenergie E, Ruheenergie E_0 und Impuls p: $E^2 = E_0^2 + (cp)^2$. Die de Broglie-Wellenlänge eines Teilchens ist $\lambda = h/p$. Damit errechne ich:

$$\lambda = \frac{ch}{\sqrt{\left(E_0 + \Delta E\right)^2 - E_0^2}}$$

Dort setze ich $\Delta E = 10\,\mathrm{eV}$ und $E_0 = 511\,\mathrm{keV}$ ein und erhalte $\lambda = 3{,}86 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

4b. Energie $20\,\mathrm{keV}$

Gleiche Rechnung, nur mit anderer $\Delta E = 20\,\mathrm{keV}$. Das Ergebnis ist $\lambda = 8{,}56\,\mathrm{m}$.

4c. α-Teilchen

Die Ruhemasse eines α-Teilchens ist $m_\alpha = c^{-2} \cdot 3727\,\mathrm{MeV}$. Ich bestimme die Geschwindigkeit mit der relativistischen Formel:

$$v = 1{,}70 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$$

4d. Stickstoffmolekül bei Zimmertemperatur

Die Masse von $^{14}N_2$ ist 28 u. Bei Zimmertemperatur $T = 290\,\mathrm{K}$ ist die kinetische Energie pro Freiheitsgrad $E = kT/2$. Die mittlere Geschwindigkeit ist somit:

$$v = \sqrt{2\frac{E}{m}} = \sqrt{\frac{kT}{m}} = 293\,\mathrm{m/s}$$

Der Impuls ist $p = 1{,}37 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg\,m/s}$, die de Broglie-Wellenlänge dazu ist $\lambda = 4{,}84 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$.

Der Ablenkwinkel α für das erste Maximum ist mit der Formel aus der Optik:

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a} \implies \alpha = 484\,\mu\mathrm{rad}$$

4e. Schnecke

Das Gewicht einer Schnecke ist vielleicht $m = 30\,\mathrm{g}$. Die Kriechgeschwindigkeit ist vielleicht $v = 1\,\mathrm{mm/s}$. Dann ist der Impuls $p = mv = 3{,}0 \times 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m/s}$. Der Streuwinkel am Gitter mit $a = 10\,\mathrm{cm}$ ist $\alpha = 2{,}21 \times 10^{-28}\,\mathrm{rad}$, also nicht zu beobachten.

Damit es aber überhaupt wirklich zur Interferenz kommen kann, darf der Ort der Schnecke nicht mehr gemessen werden, bis sie durch den Gartenzaun ist. Dies ist allerdings schwer möglich, da sie den Boden (der sie misst) zur Fortbewegung braucht. Ohne Luft und Licht hat es die Schnecke noch schwerer.

4f. Photon

Die Energie des Photons ist $E = ch/\lambda$. Sein Impuls ist $p = h/\lambda$. Die de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} ist dann λ.

5. Kastenpotential

Ich beginne mit der gegebenen Schrödingergleichung.

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left|\psi(x,t)\right\rangle = \mathscr{H} \left|\psi(x,t)\right\rangle$$
$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left|\psi(x,t)\right\rangle = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)\right)\left|\psi(x,t)\right\rangle$$

Der Impulsoperator $\hat{p}$ ist nach dem, was ich in [**?**, Seite 496] gelesen habe, $\hat{p} = \mathrm{i}\hbar\partial_x$ und nicht proportional zu ∂_t. So kann ich die Schrödingergleichung schreiben als:

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left|\psi(x,t)\right\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + U(x)\right)\left|\psi(x,t)\right\rangle$$

Das Potential $U(x)$ ist innerhalb des kompakten Intervalls identisch null, so dass ich diesen Summanden weglassen kann, wenn ich das Problem nur auf diesem Intervall betrachte.

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left|\psi(x,t)\right\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \left|\psi(x,t)\right\rangle \qquad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$
$$\mathrm{i}\partial_t \left|\psi(x,t)\right\rangle = -\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 \left|\psi(x,t)\right\rangle \qquad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

Diese parabolische partielle Differentialgleichung auf einem kompakten Intervall löse ich mit einem Separationsansatz. Mein Ansatz ist: $\psi(x,t) = \phi(x)\theta(t)$. Damit wird die Gleichung zu:

$$\mathrm{i}\phi(x)\dot{\theta}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x)\theta(t) \qquad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$
$$\mathrm{i}\frac{\dot{\theta}}{\theta} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\phi''}{\phi} = \alpha^2 \qquad x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$$

Die Integralbasis für ϕ besteht aus folgenden Elementen:

$$\left\{\cos\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\alpha x\right), \sin\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\alpha x\right)\right\}$$

Die Integralbasis für θ dagegen ist:

$$\left\{\exp\left(-\mathrm{i}\alpha^2\right)\right\}$$

Das Teilchen darf sich außerhalb des Intervalls nicht aufhalten, da es dafür dann eine unendliche Energie bräuchte. Daher muss die Wellenfunktion dort null sein. Wegen der geforderten Stetigkeit von ψ muss an den Randpunkten $\psi\left(\pm a/2\right) = 0$ gelten.

Mit dieser Randbedingung kann ich nun α näher bestimmen. Es muss für den Kosinus gelten:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\alpha\frac{a}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \iff \alpha = \frac{(2n+1)\pi\sqrt{2m}}{a\hbar}$$

Für den Sinus:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\alpha\frac{a}{2} = n\pi \iff \alpha = \frac{2n\pi\sqrt{2m}}{a\hbar}$$

Somit wird die Integralbasis für ϕ zu:

$$\left\{\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{a}x\right), \sin\left(\frac{2n\pi}{a}x\right),\right\}$$

Das α für den Kosinus eingesetzt in die Integralbasis für θ liefert:

$$\left\{\exp\left(-2\mathrm{i}\frac{(2n+1)^2\pi^2 m}{a^2\hbar^2}t\right)\right\}$$

Für den Sinus geht dies analog.

5a. Mögliche Impulse

Die Wellenzahlen k, die die Welle annehmen darf sind dann $n\pi/a$. Je nach dem, ob es eine Sinus- oder Kosinuswelle ist, muss n gerade beziehungsweise ungerade sein.

5b. Energie der Welle

Die Energie E ist ein Eigenwert des Energieoperators $\mathrm{i}\hbar\partial_t$. Ich nehme mir den entsprechenden Teil aus der Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} E\left|\psi\right\rangle &= \mathrm{i}\hbar\partial_t\left|\psi\right\rangle \\ \left(E - \mathrm{i}\hbar\partial_t\right)\left|\psi\right\rangle &= 0 \\ \left(E - \mathrm{i}\hbar\partial_t\right)\cos(kx)\exp\left(-2\mathrm{i}\frac{(2n+1)^2\pi^2 m}{a^2\hbar^2}t\right) &= 0 \end{aligned}$$

Beim Ableiten nach der Zeit t erhalte ich die innere Ableitung der Exponentialfunktion. Multipliziert mit dem Vorfaktor erhalte ich:

$$E = 2\frac{(2n+1)^2 \pi^2 m}{a^2 \hbar}$$

Von den Einheiten:

$$\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2\,J\,s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^2\,N\,m\,s}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3\,N\,s}} = \frac{\mathrm{kg\,s^2}}{\mathrm{m^3\,kg\,m\,s}} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m^4}}$$

Da stimmt also etwas nicht, es sollte N m herauskommen.

Jedenfalls lässt sich diese Rechnung noch für den Sinus wiederholen, die Energie ist dann für Bauchzahl n:

$$E = 2\frac{n^2 \pi^2 m}{a^2 \hbar}$$

5c. Normierung

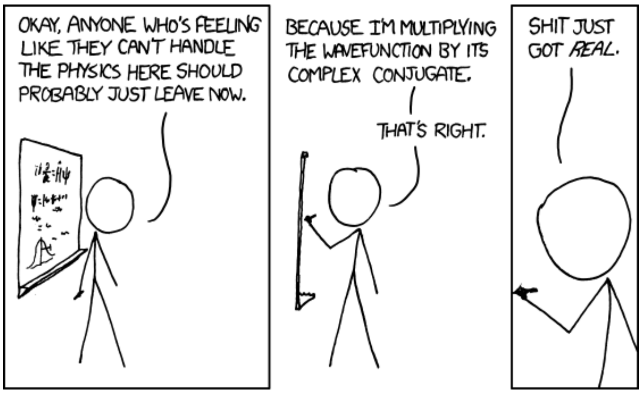


Abbildung 1: Bild aus [**?**]

Die Normierung verlangt, dass gilt:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \, \left\langle \phi(x,t) \,\middle|\, \phi(x,t) \right\rangle = 1$$

Das Argument der Exponentialfunktion in ψ ist rein imaginär, so dass der Betrag gerade 1 ist. Diese kann ich hier weglassen.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \, \psi_0^2 \cos^2(kx) = 1$$

Ich wende die Potenzformel für den Kosinus an.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \, \psi_0^2 \frac{1+\cos(2kx)}{2} = 1$$

$$\psi_0^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2k} \sin(2kx) \bigg|_{-a/2}^{a/2} \right) = 1$$

$$\psi_0^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2k} \sin\left(\frac{2n\pi}{a} x \right) \bigg|_{-a/2}^{a/2} \right) = 1$$

$$\psi_0^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{(2+1)n\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right) = 1$$

$$\psi_0^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{(2+1)n\pi} \right) = 1$$

$$\psi_0^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{(2+1)n\pi} \right)^{-1/2}$$

Somit ist die, für den Kosinus normierte, Wellenfunktion:

$$\psi(x,t) = \sum_n \beta_n \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{(2+1)n\pi} \right)^{-1/2} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{a} x \right) \exp\left(-2\mathrm{i} \frac{(2n+1)^2 \pi^2 m}{a^2 \hbar^2} t \right)$$

Analog kann eine weitere Wellenfunktion mit dem Sinus aufgestellt werden. Zusammen sind sie dann eine Fourierreihe der allgemeinen Lösung, die von den Anfangsbedingungen abhängt.