Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 12

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding — mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 12.1	H 12.2	H 12.3	H 12.4	H 12.5	$\sum$
Punkte	/ 20	/ 20	/ 10	/ 25	/ 15	/ 50

H 12.1 der Feldstärketensor

H 12.1.1 Lorenzeichung

Wir beginnen mit den inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\boldsymbol{E}} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Dort setzen wir die Beziehungen $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \dot{\boldsymbol{A}}$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ ein. Wir erhalten:

$$-\boldsymbol{\nabla}\phi - \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \dot{\boldsymbol{A}} \right\rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2} \triangle \dot{\phi} + \frac{1}{c^2} \ddot{\boldsymbol{A}} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Wir benutzen $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A} \rangle - \triangle \boldsymbol{A}$ und erhalten:

$$-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t} \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A} \rangle = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$
$$\square A + \boldsymbol{\nabla} \left(\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A} \rangle + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} \right) = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Nun wenden wir die Lorenzeichung $\phi / \left(c^2\right) + \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A} \rangle = 0$ auf beide Gleichungen an:

$$\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho$$
$$\Box \boldsymbol{A} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

Mit $\phi / c = A^0$ und $(\boldsymbol{A})^i = A^i$ erhalten wir $\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$.

H 12.1.2 Vierervektor und Inertialsystem

$\Box$ ist durch ein Skalarprodukt definiert, also invariant. j ist als Vierervektor invariant. Die Konstante μ_0 ist ein Skalar und ebenfalls invariant. Somit muss A auch invariant sein.

Die Lorenzeichung funktioniert in jedem Inertialsystem, weil sie durch ein invariantes Skalarprodukt, $\partial_\mu A^\mu$, definiert ist.

H 12.1.3 Feldstärketensor

Die Felder sind wie folgt durch die Potentiale definiert:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla} \phi - \dot{\boldsymbol{A}}$$
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$$

Wir schreiben jeweils die Komponenten von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$. Dabei benutzen wir im zweiten Schritt aus, dass $\partial_i = -\partial^i$ ist, jedoch $\partial_0 = \partial^0$.

$$E_1 = -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1$$
$$E_2 = -\partial_2 A^0 - \partial_0 A^2 = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2$$
$$E_3 = -\partial_3 A^0 - \partial_0 A^3 = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3$$
$$B_1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2$$
$$B_2 = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3$$
$$B_3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1$$

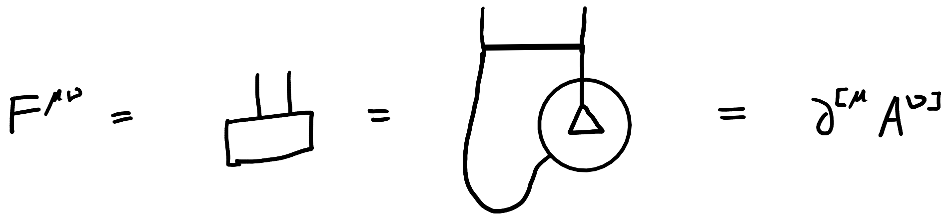
An diesem Schritt kann man den Vorgang gut in der Penrose-Notation [**?**] darstellen. Dabei ist der Vierervektor A:

$A^\mu =$ 

Wir bauen aus dem Vierervektor A und der kovarianten Ableitung (der perfekte Kreis) einen Tensor F von Stufe $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ zusammen. Dabei führen wir noch Antisymmetrie in den beiden Indizes μ und ν durch den fetten Balken ein. Diese definieren wir in der idempotenten Form als

$x^{[a}y^{b]} := \frac{1}{2}\left(x^a y^b - x^b y^a\right)$. In Indexschreibweise ist der Feldstärketensor:

$$2\partial^{[\mu}A^{\nu]} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$



Als Matrix dargestellt erhalten wir das, was auf dem Aufgabenblatt angegeben ist:

$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1/c & -E_1/c & -E_1/c \\ E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

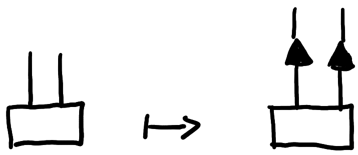
In der Diagrammnotation oder in der Schreibweise $\partial^{[\mu}A^{\nu]}$, als auch in der Matrixschreibweise, erkennen wir, dass der Tensor antisymmetrisch ist. Daher muss er nicht nur spurlos, sondern auf der ganzen Diagonalen $F^{\mu\mu} = 0$ sein.

H 12.1.4 Transformationseigenschaften

Transformation Als Tensor der Stufe $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ wird dieser mit zwei normalen Transformationen transformiert:

$$F^{\mu\nu} \mapsto \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

In der Diagrammnotation ist dies direkt zu sehen:



nicht Teil eines Vierervektors Angenommen, wir könnten $\boldsymbol{E}$ als Vierervektor E schreiben durch:

$$E^\mu = cF^{\mu 0}$$

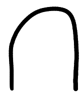
Dann müsste E sich als Vierervektor transformieren lassen, also einfach kontravariant. F transformiert sich *zweifach* kontravariant. Nach Anwendung der Transformation Λ ist diese Gleichung nicht mehr zu halten:

$$E'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu E^\nu \neq c\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = cF'^{\mu 0}$$

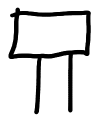
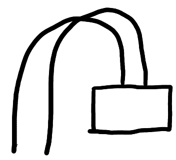
Durch die Transformation von F entstehen Mischterme mit B_i, die in einem reinen Vierervektor E nicht auftreten würden. Analog gilt dies für einen Vierervektor B, den man mit $\hat{\mathsf{F}}$ erzeugen könnte.

H 12.1.5 zweifach kovarianter Tensor

Die beiden Indizes von F können wir mit dem metrischen Tensor herunterziehen.

$g_{\mu\nu} =$ 

So erhalten wir $F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} = F^{\alpha\beta}$:

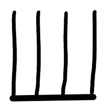
 $=$ 

Dabei sorgt der erste metrische Tensor auf μ dafür, dass die Vorzeichen in den Zeilen 1 bis 3 gedreht werden. Dann kehrt das zweite g die Vorzeichen in den Spalten 1 bis 3 um. Es werden nur die Vorzeichen von F^{0i} und F^{i0} gedreht. Somit wechseln nur die Terme des elektrischen Feldes das Vorzeichen und wir erhalten:

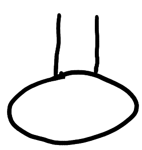
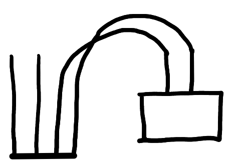
$$\mathsf{F} = \begin{pmatrix} 0 & E_1/c & E_1/c & E_1/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

H 12.1.6 dualer Feldstärketensor

Wir wenden den ϵ-Tensor

$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} =$ 

auf den kovarianten Feldstärketensor an:

$\hat{F}^{\mu\nu} =$  $= \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$

Dabei wollen wir exemplarisch den Eintrag $\hat{F}^{01}$ berechnen, die weiteren Einträge berechnen sich ähnlich. Dieser Eintrag ist:

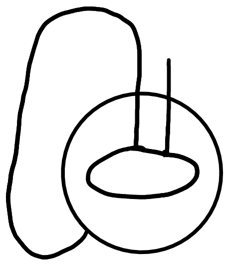
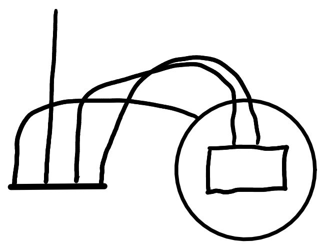
$$\hat{F}^{01} = \frac{1}{2} \epsilon^{01\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

Es gibt zwei Kombinationen für α und β, so dass nicht null herauskommt, einmal $(2,3)$ und $(3,2)$. Dabei ist $F^{23} = -B_2$ und $F^{32} = B_2$ (Antisymmetrie). Die Differenz der beiden ergibt $-2B_2$, durch das $1/2$ erhalten wir genau $-B_2$.

Dies können wir für alle Elemente von $\hat{\mathsf{F}}$ machen und erhalten so den kompletten Tensor.

H 12.1.7 homogene Maxwellgleichungen

Wir bilden die kovariante Ableitung und kontrahieren diese mit dem dualen Feldstärketensor:

$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} =$  $=$ 

Dabei gehen wir die Komponenten einzeln durch:

Fall $\nu = 0$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 0} = \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -B_1 \\ -B_2 \\ -B_3 \end{pmatrix}^\mu = \partial_i B^i = 0$$

Fall $\nu = 1$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 1} = \partial_\mu \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ E_3/c \\ -E_2/c \end{pmatrix}^\mu = c\dot{B}_1 + \frac{1}{c}\left(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2\right) = 0$$

Fall $\nu = 2$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 2} = \partial_\mu \begin{pmatrix} B_2 \\ -E_3/c \\ 0 \\ E_1/c \end{pmatrix}^\mu = c\dot{B}_2 + \frac{1}{c}\left(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3\right) = 0$$

Fall $\nu = 3$

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 3} = \partial_\mu \begin{pmatrix} B_3 \\ E_2/c \\ -E_1/c \\ 0 \end{pmatrix}^\mu = c\dot{B}_3 + \frac{1}{c}\left(\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1\right) = 0$$

Wir kombinieren alle vier Gleichungen und erhalten die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\langle \nabla, \boldsymbol{B} \rangle = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2}\dot{\boldsymbol{B}} = 0$$

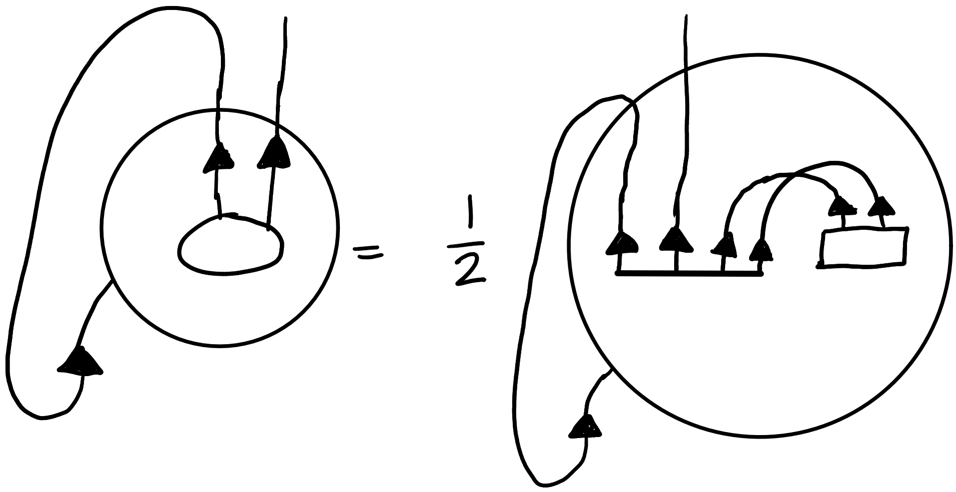
Um die Gleichungen nur mit $F^{\mu\nu}$ auszudrücken, setzen wir die Definition von $\hat{F}^{\mu\nu}$ ein:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} g_{\alpha\eta} g_{\beta\tau} F^{\eta\tau} = 0$$

Siehe dazu das Bild am Anfang dieser Teilaufgabe.

H 12.1.8 Lorentzinvarianz

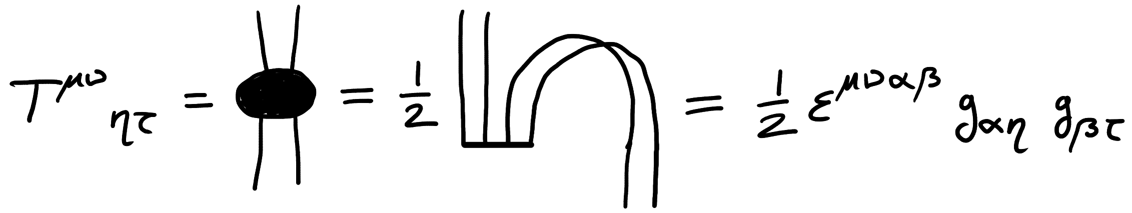
Die Gleichungen hängen davon ab, dass der komplette Ausdruck $\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu}$ gerade der Nulltensor ist. Wir wissen, dass Vierervektoren invariant sind. Im folgenden Bild ist gezeigt, dass der komplette Ausdruck insgesamt nur eine Transformation (ausgefülltes Dreieck) braucht, um transformiert zu werden. Alle anderen Transformationen treten mit der Gegentransformation. Er ist also ein Vierervektor und somit lorentzinvariant.



Auf der anderen Seite der Gleichung dürfte anstelle der 0 auch ein Vierervektor stehen, dies ist bei den inhomogenen Maxwellgleichungen der Fall.

H 12.1.9 Transformation von F auf $\hat{\text{F}}$

Die Transformation T, die F auf $\hat{\text{F}}$ abbildet, ist durch folgendes Konstrukt (ausgefüllter Kreis) gegeben:

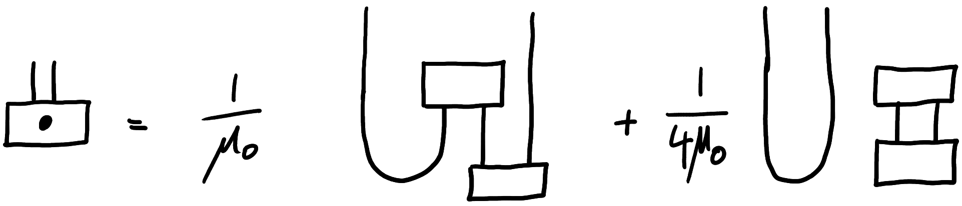


Dabei ist T ein Tensor der Stufe $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. Dies ist es der gemischte ϵ-Tensor $\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}$.

H 12.2 Energie des elektromagnetischen Feldes

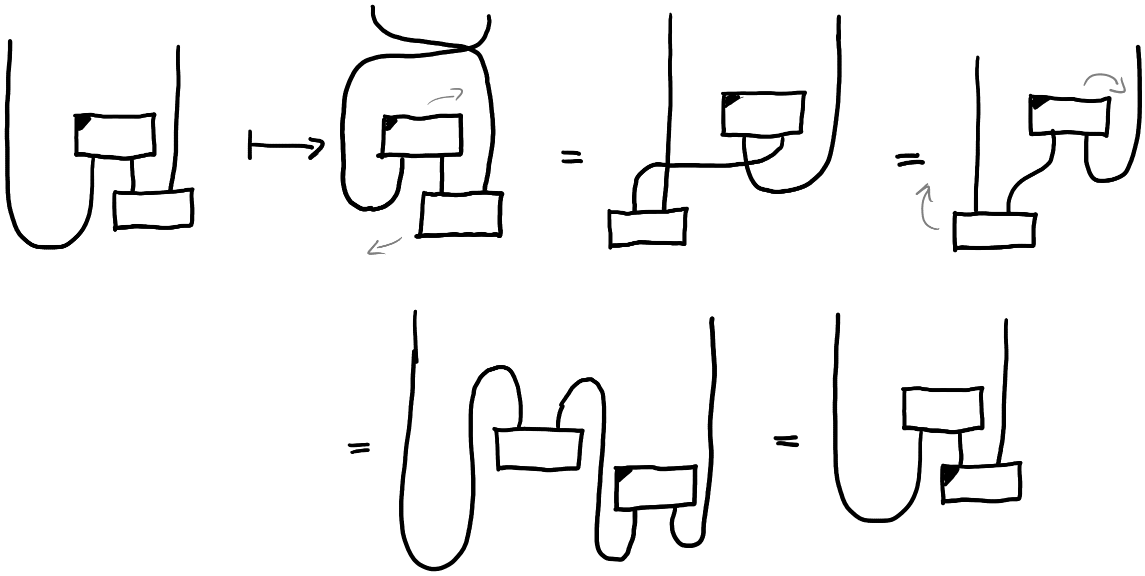
H 12.2.1 Transformations- und Symmetrieeigenschaften

Der Energie-Impuls-Tensor (Rechteck mit Punkt) ist definiert über den Feldstärketensor (Rechteck) als:

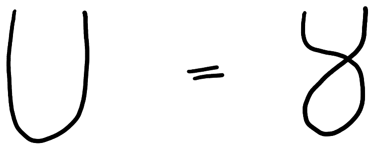


Transformationseigenschaften Dieser Tensor transformiert wie jeder andere Tensor der Stufe $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$, man braucht zwei normale Transformationen Λ.

Symmetrie Der Tensor ist symmetrisch. Wir haben einen der beiden Feldstärketensoren mit einer schwarzen Ecke gekennzeichnet, um die Schritte zu verdeutlichen. Wir vertauschen die beiden Indizes ($\mapsto$). Dann verschieben wir die beiden Tensoren ein wenig (erstes =). Dann benutzen wir die Antisymmetrie zweimal (zweites =). Wir verschieben wieder (zweite Zeile). Der Tensor mit Indizes oben (kontravariant), dessen Indizes nach unten gebogen werden, hatten wir bereits mit dem Tensor mit Indizes unten (kovariant) identifiziert. Somit erhalten wir den letzten Schritt.

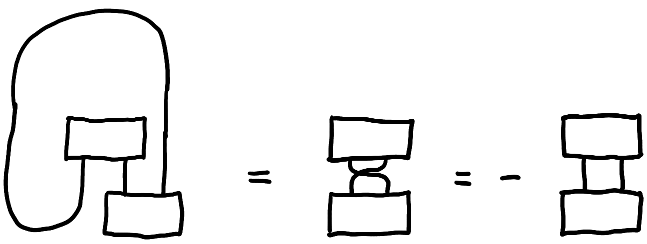


Der metrische Tensor im zweiten Summanden ist symmetrisch, da er Diagonalform hat.

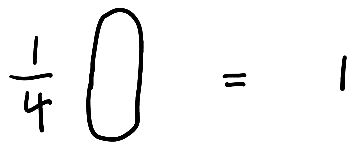


Spur Um die Spur zu bestimmen, kontrahieren wir die beiden verbleibenden Indizes. Dabei brauchen wir noch einen metrischen Tensor um einen der Indizes herunterziehen. Wir rechnen diese Aufgabe komplett in der Diagrammnotation.

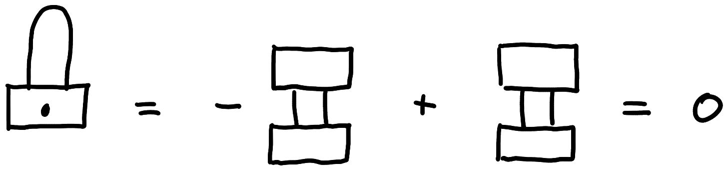
Zuerst kontrahieren wir den ersten Summanden. Durch Verschieben der Verbindungen erhalten wir die beiden Tensoren über kreuz kontrahiert. Durch die Antisymmetrie können wir dies „entwirren“ und erhalten das Negative:



Im zweiten Summanden ist bereits der Feldstärketensor mit einem zweiten kontrahiert. An den metrischen Tensor schließen wir noch einen Kovarianten an und erhalten 4 ($g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1$):



Zusammen ist die Spur $T^{\mu}{}_{\mu} = 0$:



H 12.2.2 Energiedichte und Energiestromdichte

Energiedichte Wir beginnen mit der Energiedichte:

$$T^{00} = \frac{1}{\mu_0} g^{0\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta 0} + \frac{1}{4\mu_0} g^{00} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

Im ersten Summanden ist durch den metrischen Tensor nur $\alpha = 0$ interessant. Somit können wir F einsetzen:

$$= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{E}/c \end{pmatrix}_\beta \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{E}/c \end{pmatrix}^\beta + \frac{1}{4\mu_0} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

Im letzten Term werden die beiden Matrizen aufeinander gelegt, elementweise multipliziert und dann alles aufaddiert.

$$\begin{aligned} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(-\frac{\boldsymbol{E}^2}{c^2} + \boldsymbol{B}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E} \rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{H} \rangle \right) \end{aligned}$$

Energiestromdichte Für die Energiestromdichte gehen wir ähnlich vor. Dabei leiten wir nur T^{i0} her, da T^{0i} aufgrund der Symmetrie gleich ist.

$$T^{i0} = \frac{1}{\mu_0} g^{i\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta 0} + \frac{1}{4\mu_0} g^{i0} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

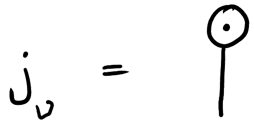
Die $g^{i\alpha}$ sind für $\alpha = i \in \{1, 2, 3\}$ genau -1. Alle g^{i0} sind 0.

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\mu_0} F_{i\beta} F^{\beta 0} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}_{i\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ E_1/c \\ E_2/c \\ E_3/c \end{pmatrix}^\beta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c\mu_0} \begin{pmatrix} E_2B_3 - E_3B_2 \\ E_3B_1 - E_1B_3 \\ E_1B_2 - E_2B_1 \end{pmatrix}_i \\
&= \frac{1}{c\mu_0} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})_i \\
&= \frac{1}{c} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_i \\
&= \frac{1}{c} \boldsymbol{S}_i
\end{aligned}
$$

H 12.2.3 kovariante Ableitung

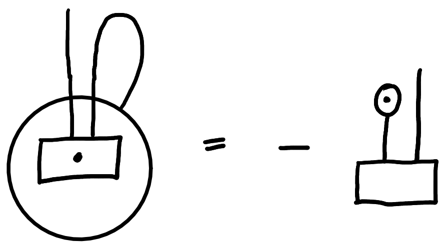
Wir definieren den Strom Vierervektor in der Diagrammnotation:



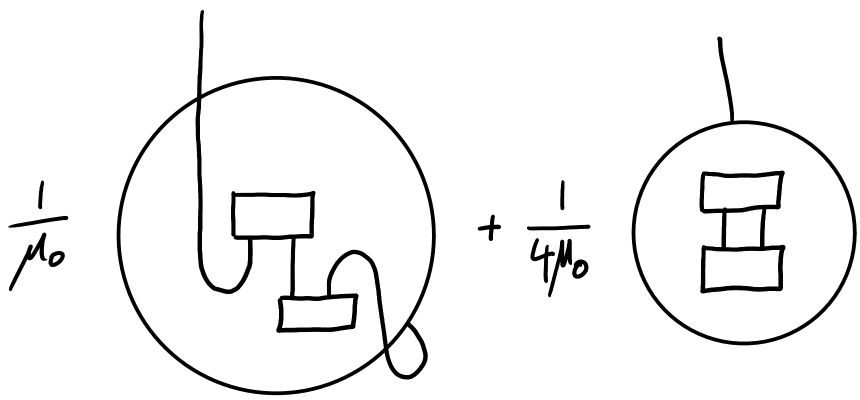
Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -j_\nu F^{\mu\nu}$$

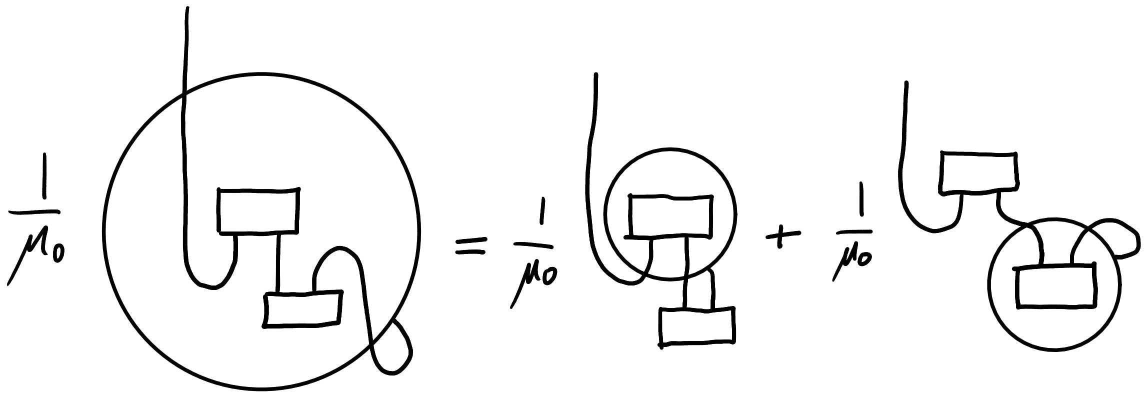
Dies im Diagramm:



Wir setzen die Definition von $T^{\mu\nu}$ ein und spalten die Summe in zwei Ableitungen auf:



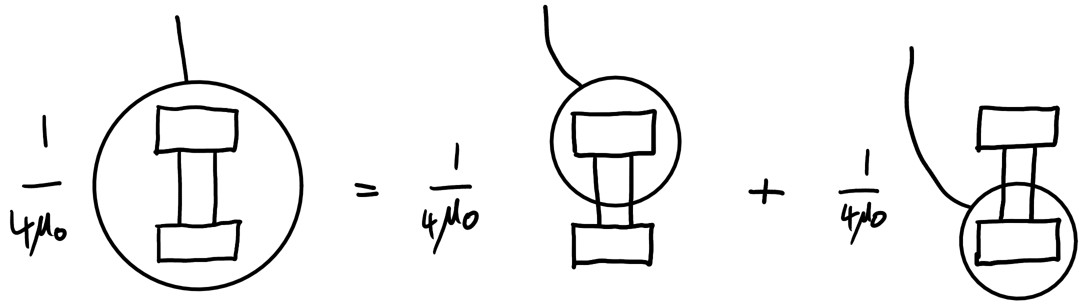
Für den ersten Summanden wenden wir die Produktregel für Tensoren an:



Der rechte Teil ist:

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} + \frac{1}{\mu_0}F^\mu{}_\alpha\left(\partial_\nu F^{\alpha\nu}\right)$$

Für den zweiten Summanden von weiter oben wenden wir ebenfalls die Produktregel an:



Alles zusammen:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} + \frac{1}{\mu_0}F^\mu{}_\alpha\left(\partial_\nu F^{\alpha\nu}\right) + \frac{1}{4\mu_0}\left(\partial^\mu F_{\alpha\nu}\right)F^{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0}F^{\alpha\nu}\partial^\mu F_{\alpha\nu}$$

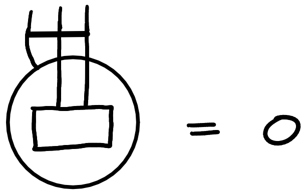
Die beiden letzten Terme sind gleich, wir fassen sie zusammen:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} + \frac{1}{\mu_0}F^\mu{}_\alpha\left(\partial_\nu F^{\alpha\nu}\right) + \frac{1}{2\mu_0}\left(\partial^\mu F_{\alpha\nu}\right)F^{\alpha\nu}$$

Wir benutzen die Relation $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ im zweiten Summanden. Außerdem heben und senken wir Indizes im letzten Summanden:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} - F^{\mu\alpha}j_\alpha + \frac{1}{2\mu_0}\left(\partial^\mu F^{\alpha\nu}\right)F_{\alpha\nu}$$

Die Bianchi-Identität können wir kompakter schreiben als $\partial^{[\alpha}F^{\beta\gamma]} = 0$ [**?**, Seite 303]. Als Diagramm:



Diese Identität benutzen wir nun im letzten Summanden:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} - F^{\mu\alpha}j_\alpha - \frac{1}{2\mu_0}\left(\left(\partial^\alpha F^{\nu\mu}\right)F_{\alpha\nu} + \left(\partial^\nu F^{\mu\alpha}\right)F_{\alpha\nu}\right)$$

Die Indizes des ersten Summanden in der letzten Klammer benennen wir von $(\partial^\alpha F^{\nu\mu})F_{\alpha\nu}$ in $(\partial^\nu F^{\mu\alpha})F_{\alpha\nu}$ um, dabei haben wir zweimal die Antisymmetrie benutzt[1]. Die beiden Summanden in der letzten Klammer sind nun gleich, so dass wir vereinfachen können zu:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial_\alpha F^\mu{}_\nu\right)F^{\nu\alpha} - F^{\mu\alpha}j_\alpha - \frac{1}{\mu_0}\left(\partial^\nu F^{\mu\alpha}\right)F_{\alpha\nu}$$

Wir verschieben die Indizes im ersten Summanden, außerdem benennen wir die Indizes im letzten Summanden so um, dass sie dem ersten entsprechen. Nun ist der Erste gleich dem Letzten:

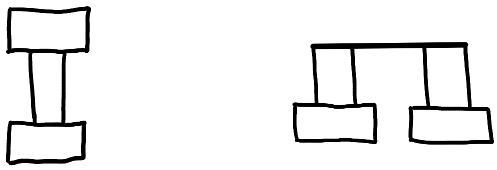
$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(\partial^\alpha F^{\mu\nu}\right)F_{\nu\alpha} - F^{\mu\alpha}j_\alpha - \frac{1}{\mu_0}\left(\partial^\alpha F^{\mu\nu}\right)F_{\nu\alpha}$$

Wir ersetzen noch das α durch ein ν und erhalten die auf dem Aufgabenblatt gesuchte Relation:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = -j_\nu F^{\mu\nu}$$

H 12.3 Eindeutigkeit der Elektrodynamik

Die beiden Ausdrücke sind:



Wir nennen sie L_1 und L_2.

[1] http://physics.stackexchange.com/a/51801/5705

H 12.3.1 elektrische und magnetische Felder

erster Ausdruck Wir legen die $F^{\mu\nu}$ und $F_{\mu\nu}$ aufeinander und multiplizieren punktweise, dann addieren alles auf. Wir erhalten:

$$L_1 = -2\frac{1}{c^2}E_iE^i + 2B_iB^i$$

zweiter Ausdruck L_2 können wir auch schreiben als:

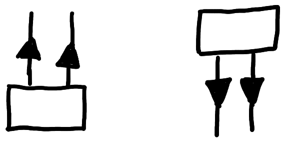
$$L_2 = 2\hat{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Die beiden Matrizen legen wir aufeinander, multiplizieren punktweise und addieren alles. Wir erhalten:

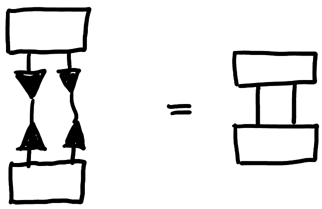
$$L_2 = -\frac{4}{c}B_iE^i$$

H 12.3.2 Verhalten unter Transformationen

erster Ausdruck Die beiden Tensoren werden mit der Transformation Λ transformiert, dabei wird der kovariante Vektor mit der normalen und der kontravarianten mit der inversen Transformationen transformiert.



Kontrahiert heben sich gerade die Transformationen auf, so dass der erste Ausdruck bezüglich *aller orthonormalen Transformationen* ($\Lambda^T = \Lambda^{-1}$) invariant ist, darunter auch Zeitumkehr und Parität:



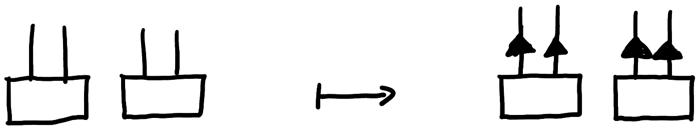
Die Ladungskonjugation $\varrho \mapsto -\varrho$ sorgt dafür, dass in jedem j^μ das Vorzeichen umgekehrt wird. Zum einen weil $j^0 = \varrho$, zum anderen weil $j_i = \varrho v_i$ ist. Dadurch ändert sich auch das Vorzeichen in allen A^μ, da diese direkt über j^μ definiert sind:

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu$$

Der Vorzeichenwechsel in den A^μ sorgt auch für Vorzeichenwechsel in $F^{\mu\nu}$, da $F^{\mu\nu} := 2\partial^{[\mu}A^{\nu]}$ ist.

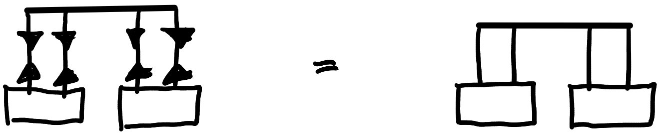
Im Ausdruck L_1 ändert sich jedoch nichts, weil die auf beiden Seiten eingeführten Minuszeichen sich aufheben. L_1 ist also invariant gegenüber Ladungskonjugation.

zweiter Ausdruck Die beiden $F^{\mu\nu}$ werden zweifach kontravariant transformiert:



Das Levi-Civita-Symbol wird vierfach kovariant transformiert:

Zusammen heben sich die Transformationen wieder auf:



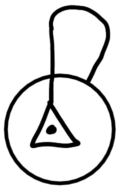
Auch dieser Ausdruck ist invariant gegenüber Parität und Zeitumkehr.

Analog zu L_2 ändern sich in $F_{\mu\nu}$ und $\hat{F}^{\mu\nu}$ alle Vorzeichen, so dass die Kontraktion invariant gegenüber Ladungskonjugation ist.

H 12.3.3 totale Divergenz

Wir sollen zeigen, dass sich L_2 als totale Divergenz eines Vierervektors G schreiben lässt, also als

$$\partial_\mu G^\mu$$



Dazu benutzen wir die Notation für die Antisymmetrie und ziehen eine Ableitung heraus. Die Antisymmetrie übernimmt der Levi-Civita-Tensor: [2]

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = 4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\partial_{[\mu} A_{\nu]}\right) \left(\partial_{[\alpha} A_{\beta]}\right)$$

Der Levi-Civita-Tensor übernimmt schon die Antisymmetrisierung, so dass wir diese in der ersten Klammer weglassen können.

$$= 4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\partial_{\mu} A_{\nu}\right) \left(\partial_{[\alpha} A_{\beta]}\right)$$

[2] http://physics.stackexchange.com/a/51698/5705

Wir ziehen die partielle Ableitung ∂_μ nach vorne. Dabei haben wir jetzt einen weiteren Term durch die Produktregel bekommen, den wir in der Lagrangedichte so nicht stehen haben. Das ∂_μ soll auf das A_ν wirken, wirkt jedoch auch noch auf das A_β. Diesen Summand ziehen wir ab, um den Fehler zu korrigieren.

$$= 4\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_{[\alpha} A_{\beta]} - 4\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\mu \partial_{[\alpha} A_{\beta]}$$

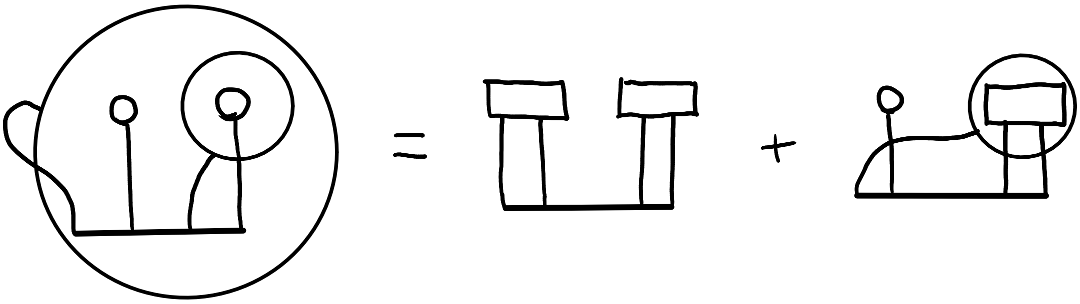
Der Levi-Civita-Tensor sorgt allerdings dafür, dass der Term $\partial_{[\mu} F_{\alpha\beta]}$ vorkommt, der nach der Bianchi-Identität gerade 0 ist.

$$= 4\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_{[\alpha} A_{\beta]}$$

Den rechten Teil definieren wir als G^μ, so dass dessen totale Divergenz gerade die Lagrangedichte ist.

$$=: \partial_\mu G^\mu$$

Das Anwenden der Produktregel haben wir hier in der Penrose-Notation. Dort haben wir direkt $F^{\mu\nu}$ eingesetzt. Im letzten Summanden erkennen wir die Bianchi-Identität, der Summand fällt also weg.



H 12.4 stromdurchflossener Draht

H 12.4.1 Transformation ins Ruhesystem

Wir transformieren mit folgender Abbildung, wobei sich β auf das v der Elektronen bezieht:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & & \\ -\beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die neuen Positionen sind:

$$\mathsf{R}'_{\mathrm{A}n} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma nd \\ -\beta\gamma ct + \gamma nd \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{R}'_{\mathrm{e}n} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma nd - \beta\gamma vt \\ \gamma nd \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Abstände sind jetzt jeweils:

$$d'_{\mathrm{A}} = d'_{\mathrm{e}} = \gamma d$$

H 12.4.2 elektrische und magnetische Feld

Das elektrische Potential sind Punktladungen. Die φ_n können aufaddiert werden, um das ganze Potential zu bekommen:

$$\varphi_{\mathrm{e}n} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\mathsf{x}' - \mathsf{R}'_{\mathrm{e}n}\right|}$$

Dadurch, dass die Elektronen in ihrem System Σ' in Ruhe sind, ist $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$. Das Vierer-Potential ist also:

$$\mathsf{A}' = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das elektrische Feld im Ruhesystem der Elektronen Σ' ist das elektrische Feld der Gradient:

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{\left|\mathsf{x}' - \mathsf{R}'_{\mathrm{e}n}\right|}$$

Wir transformieren in das Ruhesystem der Atome Σ:

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \varphi/c \\ -\beta\gamma\varphi/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das elektrische Feld im System Σ:

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}n} = -\gamma\nabla\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left|\mathsf{x}' - \mathsf{R}'_{\mathrm{e}n}\right|}$$

Hier müssen wir x' und R' wieder zurück transformieren. Jedoch kommt hier dann ein recht sperriger Ausdruck raus.

$$\boldsymbol{E}_{\text{en}} = -\gamma \nabla \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} \gamma^2 ct + \beta\gamma x^1 - \gamma ct + \beta\gamma nd + \beta\gamma vt \\ \beta\gamma^2 ct + \gamma x^1 - \gamma nd \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$$

Das magnetische Feld erhalten wir durch Rotation. Auch hier müssten wir wieder in das System Σ transformieren, dies schreiben wir nur formal hin:

$$\boldsymbol{B} = -\beta \frac{\gamma}{c} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{1}{\left| \Lambda^{-1}\mathsf{x}' - \Lambda^{-1}\mathsf{R}'_{en} \right|}$$

H 12.4.3 kontinuierlicher Strom

Im System Σ ist die Stromdichte:

$$\boldsymbol{j} = I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist:

$$\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{e}}_1$$

Da $\boldsymbol{j} = \varrho \boldsymbol{j}$ gelten soll, ist die Ladungsdichte:

$$\varrho = \frac{I}{v}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right)$$

Das elektrische Feld um der Elektronen bestimmen wir mit dem Gesetz von Gauß:

$$\begin{aligned} \oint \langle \mathbf{d}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D} \rangle &= \int \mathrm{d}V\, \varrho \\ 2\pi r D\, \mathrm{d}x &= \frac{I}{v}\, \mathrm{d}x \\ \boldsymbol{E} &= \frac{I}{2\pi v \varepsilon_0} \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{e}}_\rho \end{aligned}$$

Die magnetische Induktion bestimmen wir mit dem Satz von Stokes:

$$\begin{aligned} \oint \langle \boldsymbol{s}, \boldsymbol{H} \rangle &= \int \mathrm{d}A\, \boldsymbol{j} \\ 2\pi r H &= I \\ \boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{e}}_\phi \end{aligned}$$

Wir setzen den Vierer-Strom zusammen:

$$\mathrm{j} = \begin{pmatrix} \frac{I}{cv}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \\ I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diesen Vektor transformieren wir mit Λ:

$$\mathrm{j}' = \begin{pmatrix} \gamma\frac{I}{cv}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) - \beta\gamma I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \\ -\beta\gamma\frac{I}{cv}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) + \gamma I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir die transformierte Ladungs- und Stromdichten:

$$\varrho' = \gamma\frac{I}{cv}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) - \beta\gamma I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right), \quad \boldsymbol{j}' = \left(-\beta\gamma\frac{I}{cv}\delta\left(y\right)\delta\left(z\right) + \gamma I\delta\left(y\right)\delta\left(z\right)\right)\hat{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{0}$$

Nun können wir analog das elektrische Feld für das System Σ' aufstellen.

$$\begin{aligned} \oint \left\langle \mathbf{d}\boldsymbol{A}, \boldsymbol{D}' \right\rangle &= \int \mathrm{d}V\,\varrho' \\ 2\pi D'\,\mathrm{d}x &= \left(\frac{\gamma I}{cv} - \beta\gamma I\right)\mathrm{d}x \\ \boldsymbol{E}' &= \frac{\frac{\gamma I}{cv} - \beta\gamma I}{2\pi\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{e}}_\rho \end{aligned}$$

Die magnetische Induktion: $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{0}$.

Diese Ergebnisse decken sich mit denen aus der Elektro- und Magnetostatik.

H 12.5 Relativistik in den Maxwellgleichungen

Gegeben ist $\partial_i B^i = 0$. Mit dem Feldstärketensor $\hat{F}^{\mu\nu}$ und $\hat{F}^{00} = 0$ können wir dies schreiben als:

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu 0} = 0$$

Nun ist gefordert, dass dies lorentzinvariant ist. Wir führen eine Pseudorotation $\Lambda^\mu{}_\nu$ (Boost in x^1-Richtung) aus. Unsere Gleichung wird transformiert zu:

$$\partial_\mu \Lambda^0{}_\nu \hat{F}^{\mu\nu} = 0$$

Dabei brauchen wir μ nicht transformieren, da über diesen Index kontrahiert wird. Der Kovektor $\Lambda^0{}_\nu$ ist $(\gamma, -\beta\gamma, 0, 0)$. Wir kontrahieren mit $\hat{F}^{\mu\nu}$ zu $\Lambda^0{}_\nu \hat{F}^{\mu\nu}$. Dies schreiben wir als Matrixmultiplikation schematisch auf:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \gamma \\ -\beta\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3/c & -E_2/c \\ B_2 & -E_3/c & 0 & E_1/c \\ B_3 & E_2/c & -E_1/c & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \beta\gamma B_1 \\ \gamma B_1 \\ \gamma B_2 + \beta\gamma E_3/c \\ \gamma B_3 - \beta\gamma E_2/c \end{pmatrix} \end{array}$$

Auch im transformierten System soll die totale Divergenz null sein. Mit $\partial_\mu : (\partial_0/c, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ kontrahiert erhalten wir.

$$\frac{\beta\gamma}{c}\partial_0 B_1 + \gamma\partial_1 B_1 + \gamma\partial_2 B_2 + \frac{\beta\gamma}{c}\partial_2 E_3 + \gamma\partial_3 B_3 - \frac{\beta\gamma}{c}\partial_3 E_2 = 0$$

Wir benutzen $\partial_i B^i = 0$.

$$\frac{\beta\gamma}{c}\partial_0 B_1 + \frac{\beta\gamma}{c}\partial_2 E_3 - \frac{\beta\gamma}{c}\partial_3 E_2 = 0$$

Nun teilen wir noch durch die Konstanten und erhalten:

$$\partial_0 B_1 + 2\partial_{[2} E_{3]} = 0$$

Diese Rechnung bis hier führen wir noch mit den zwei verbleibenden Pseudorotationen aus. Wir erhalten folgende Relationen:

$$\partial_0 B_2 + 2\partial_{[3} E_{1]} = 0, \quad \partial_0 B_3 + 2\partial_{[1} E_{2]} = 0$$

Alle drei zusammen sind gerade die gesuchte Gleichung, das Gesetz von Faraday:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = 0$$