Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 11

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding — mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 11.1	H 11.2	H 11.3	$\sum$
Punkte	/ 20	/ 10	/ 20	/ 50

H 11.1 Die Lorentzgruppe

H 11.1.1 Motivation der Einteilung

Die Länge $d := \|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\boldsymbol{x} g \boldsymbol{x}} = \sqrt{x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}}$ ist physikalisch die Eigenzeit. Für eine Reise entlang des Vektors $\boldsymbol{x}$ vergeht diese Eigenzeit. Reisen innerhalb des Lichtkegels erfordern eine positive Zeit, entlang des Kegels sind Lichtstrahlen, für die keine Eigenzeit vergeht. Reisen entlang Vektoren $\boldsymbol{x}$, die nicht innerhalb des Kegels liegen, sind nicht möglich, daher eine imaginäre Reisezeit.

Somit können wir Reisen mit $d = 0$ als lichtartig bezeichnen. Entfernungen, die innerhalb des Kegels liegen, haben ihre Hauptentfernung (Maximumsnorm) in der Zeit und können so als zeitartig bezeichnet werden. Entfernungen zwischen zwei Ereignissen, die gleichzeitig (geht nur bezüglich des aktuellen Systems) passieren, ist sinnvollerweise raumartig. Ihr Abstandsquadrat d^2 ist kleiner als null, so dass dies passt.

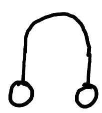
H 11.1.2 nur lineare Abbildungen

Nur lineare Abbildungen lassen die physikalisch sinnvolle Größe, die Eigenzeit d, invariant. Dies lässt sich am einfachsten in der Penrose-Notation darstellen. [?]

Dazu definieren wir folgende Symbole gemäß der Notation. Dabei sind Tensoren die geometrischen Formen, Indizes nach oben (Vektor) und unten (Kovektor) werden durch Anfasser oben beziehungsweise unten dargestellt. Der metrische Tensor ist einfach ein Bügel:

$x^\mu =$  $\Lambda^\mu{}_\nu =$  $g_{\mu\nu} =$ 

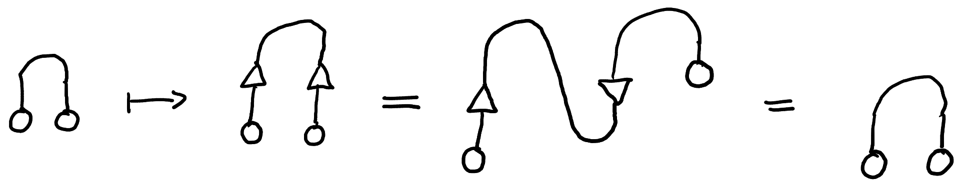
Kontraktion wird in dieser Notation über das Verbinden von Indizes dargestellt. So ist das Skalarprodukt:

$\langle x, x \rangle =$ 

Nun wenden wir die Transformation Λ an, kontrahieren $\boldsymbol{x}$ also mit Λ:

Das Skalarprodukt wird auch transformiert. Wir fügen noch zwei metrische Tensoren ein und benutzen die Umkehrabbildung Λ^{-1}. Da die Transformation aus der Symmetriegruppe des Minkoswkiraums, $O(1,3)$ stammt, ist die Transformationsmatrix Λ es eine orthonormale Matrix. Daher ist die inverse Matrix nur die Transponierte. Diese erhalten wir, wie in der nächsten Zeichnung schon enthalten, über Kontraktion mit zwei metrischen Tensoren ($\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} \mapsto \Lambda_{\gamma}{}^{\eta}$). Wäre Λ keine lineare Abbildung, sondern etwas allgemeineres, gäbe es zum einen keine Komponentendarstellung, zum anderen wäre das Inverse nicht das Transponierte.

Im nächsten Schritt nutzen wir auch aus, dass $g_{\mu\nu}g^{\nu\xi} = \delta_{\mu}{}^{\xi}$. Dann nutzen wir aus, dass $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$. Wir erhalten das ursprüngliche Skalarprodukt:



Das ganze können wir auch noch rechnerisch zeigen:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = x^{\alpha} g_{\alpha\beta} x^{\beta}$$

Wir bilden mit Λ ab.

$$\mapsto \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} x^{\alpha} g_{\gamma\eta} \Lambda^{\eta}{}_{\beta} x^{\beta}$$

Wir führen zwei weitere metrische Tensoren ein und benutzen die Umkehrabbildung $\Lambda^{-1} =: \tilde{\Lambda}$.

$$= \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} x^{\alpha} g_{\gamma\xi} g^{\xi\eta} \tilde{\Lambda}_{\eta}{}^{\iota} g_{\iota\beta} x^{\beta}$$

Die beiden metrischen Tensoren werden zu einem δ wegen $g_{\mu\nu}g^{\nu\xi} = \delta_{\mu}{}^{\xi}$, so dass sich die Indizes γ und η identisch werden.

$$= \Lambda^{\gamma}{}_{\alpha} x^{\alpha} \tilde{\Lambda}_{\gamma}{}^{\iota} g_{\iota\beta} x^{\beta}$$

Wir nutzen aus, dass $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$.

$$= \delta^{\iota}{}_{\alpha} x^{\alpha} g_{\iota\beta} x^{\beta}$$

Wir führen noch das letzte δ aus und erhalten unsere ursprüngliche Summe:

$$\begin{aligned} &= x^{\alpha} g_{\alpha\beta} x^{\beta} \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \end{aligned}$$

H 11.1.3 Forderung nach Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Bei einer Lorentztransformation Λ soll die Lichtgeschwindigkeit konstant bleiben. Unter anderem wollen wir, dass lichtartige Wege (ohne Eigenzeit) weiterhin ohne Eigenzeit sind. Dies ist formal:

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \implies \|\Lambda \boldsymbol{x}\| = 0$$

Wir haben in der vorherigen Aufgabe schon gezeigt, dass die Lorentztransformation das Skalarprodukt überhaupt nicht ändert. Von daher können wir sicher einen Faktor $a(\Lambda) = 1$ einfügen.

H 11.1.4 Faktor gleich eins

Siehe oben.

H 11.1.5 Isometriebedingung

Das ist letztlich das, was wir weiter oben schon benutzt haben. Unsere Herleitung hat ja gerade nur deshalb funktioniert, weil das Inverse das Transponierte ist. Von daher haben wir die Isometriebedingung schon gefolgert.

H 11.1.6 räumliche Drehungen als Lorentztransformation

Die Symmetriegruppe des Minkoswkiraums $\mathbb{M}$ ist $O(1,3)$. Lassen wir die Zeit weg, erhalten wir den normalen, drei dimensionalen, Euklidischen Raum $\mathbb{E}^3$. Die Symmetriegruppe ist dort $O(3)$.

H 11.1.7 Zeitumkehr und Parität

T und P sind orthonormale Matrizen. Dies ist schnell daran zu sehen, dass das Inverse das Transponierte ist. Da beide Transformationen Umkehrungen sind, ist die gleiche Transformation auch die Umkehrtransformation. Somit gilt sogar:

$$\mathsf{T} = \mathsf{T}^T = \mathsf{T}^{-1}$$

Analog für P.

H 11.1.8 Zeitdilatation und Determinante

${\Lambda^0}_0$ ist ein Zeitstreckungsfaktor. Dieser muss betragsmäßig größer als eins sein.

Die Determinante einer orthonormalen Matrix aus $SO(3)$ und $SO(1,3)$ muss 1 sein. Da wir auch Abbildungen zulassen, die die Orientierung umkehren, also aus $O(1,3)$, darf auch -1 heraus kommen.

H 11.1.9 negativer Zeitstreckungsfaktor

Bei negativem Zeitstreckungsfaktor wird die Zeit umgekehrt. Es ist also eine Transformation aus $SO(1,3)$ zusammen mit der Zeitumkehr.

H 11.1.10 Gruppe

Wir müssen die Gruppenaxiome nachrechnen. Da wir die Elemente der Gruppe als Matrizen darstellen können, können wir einiges überspringen.

Die Gruppe ist bezüglich folgender Verknüpfung $\circ$ gemeint:

$$\mathsf{B} \circ \mathsf{A} = \mathsf{BA} \iff {(\mathsf{B} \circ \mathsf{A})^\alpha}_\beta = {B^\alpha}_\gamma {A^\gamma}_\beta$$

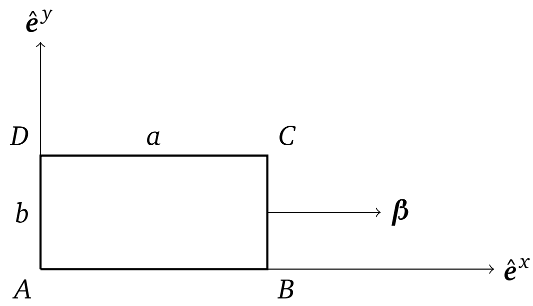


Abbildung 1: Skizze zu H 11.2.1

neutrales Element Als neutrales Element erfüllt die Einheitsmatrix die Neutralitätsbedingung: $1 \circ \mathsf{A} = \mathsf{A}$.

Assoziativität Da Matrizen bereits assoziativ sind, sind diese speziellen es auch. Es bleibt zu überprüfen, dass die Determinante weiterhin eins bleibt und der Zeitstreckungsfaktor betragsmäßig größer als eins bleibt.

Die Determinante bleibt eins, weil für beliebige quadratische Matrizen gilt:

$$\det(\mathsf{BA}) = \det \mathsf{B} \det \mathsf{A}$$

Für den Zeitstreckungsfaktor gilt:

$$C^0{}_0 = B^0{}_\alpha A^\alpha{}_0$$

Hier fehlen noch Inhalte.

inverses Element Zu jeder physikalischen Transformation gibt es eine Umkehrung. Wäre das nicht der Fall, so würden Dimensionen verloren gehen. Dies kann allerdings durch Translationen, Rotationen oder Boosts nicht passieren. Die Determinante bleibt eins, da sie vorher auch eins war. Anschaulich liegt das daran, dass eine Lorentztransformation das Volumen nicht verändert. Das muss dann auch für die Rückrichtung gelten.

H 11.1.11 andere Zweige

Die Zeitumkehr negiert den Zeitstreckungsfaktor sowie die Determinante. Die Parität negiert die Determinante. Somit kann man mit P der Übergang von $\mathscr{L}_+$ zu $\mathscr{L}-$, sowie mit PT der Übergang von $\mathscr{L}^\uparrow$ zu $\mathscr{L}^\downarrow$ vollzogen werden.

H 11.2 Unbeobachtbarkeit der Lorentzkontraktion

H 11.2.1 Projektion

Es sei das Rechteck im System K' in Ruhe und der Betrachter im System K in Ruhe. Das System K' bewegt sich mit $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\boldsymbol{e}}^x$ im Bezug zum System K.

Die beiden wichtigen Eckpunkte des Rechtecks sind im gestrichenen System:

$$\boldsymbol{A}'(t') = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}'(t') = \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \\ b' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Ausstrahlereignisse der Ecken A und D müssen einen lichtartigen Abstand haben, weil sich ein Lichtstrahl von der Ecke D an der Ecke A vorbei (zumindest in y-Projektion) muss.

Wir folgern also folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{D}'(t') - \boldsymbol{A}'(t' + \tau') \right\| &= 0 \\ \left(c\tau'\right)^2 - b^2 &= 0 \\ \tau' &= \frac{b}{c} \end{aligned}$$

Das Licht braucht die Zeit b/c um entlang der Kante AD, die die Länge b hat, zu reisen. In dieser Zeit ist der Beobachter schon um $-c\beta\tau'$ weiter, also um $-b\beta$. Er sieht von der nicht relativistisch betrachteten Seite die Länge βb.

Eigentlich sind wir damit schon fertig, jedoch haben wir überhaupt nicht keine Längenkontraktion oder Zeitdilatation in dieser Aufgabe gehabt, der Faktor γ ist nicht aufgetaucht.

Wenn wir die Transformationsmatrix Λ aufstellen, erhalten wir diesen Faktor. Die Rücktransformation erhalten wir durch $\beta \mapsto -\beta$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun können wir die Vektoren $\boldsymbol{A}'$ und $\boldsymbol{D}'$ transformieren und erhalten mit $t' = \gamma t$:

$$\boldsymbol{A}(t') = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \beta ct \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}(t') = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \beta ct \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn wir in diesem System jetzt für eine instantane Messung $\left\|\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{D}(t)\right\|$ nehmen, erhalten wir wieder b, wie erwartet. Transformieren wir allerdings noch den Vektor $\boldsymbol{B}'$:

$$\boldsymbol{B}(t') = \begin{pmatrix} \gamma ct' \\ \beta\gamma ct' + \gamma a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{pmatrix} ct \\ \beta ct + \gamma a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Abstand $\left\|\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t)\right\|$ war zwar wie zu erwarten a, allerdings ist nun $\left\|\boldsymbol{A}(t) - \boldsymbol{B}(t)\right\| = \gamma b$ anstelle b/γ.

Aus der Bedingung für die Lichtartigkeit des Abstandes erhalten wir im System K für τ:

$$\tau = \frac{\gamma}{c} b$$

In der Zeit $\beta c\tau$ legt das System K' die Strecke $\beta b\gamma$ zurück. Für $\gamma \gg 1$ kann jetzt der Abstand beliebig groß werden.

Wenn die Länge $b\gamma$ jetzt wieder mit dem Faktor γ schrumpft, dann kommt gerade wieder βb für den sichtbaren teil heraus, es würde passen.

H 11.2.2 ruhendes, gedrehtes Rechteck

Wir drehen das Rechteck um die z-Achse um den Winkel α. Somit ist die Projektion auf die x-Achse $\sin(\alpha)\, b = \beta b$ lang.

H 11.3 Lorentztransformation

H 11.3.1 lineare Transformation

Wir möchten von der Isotropie und Homogenität ausgehen. Daher gehen wir davon aus, dass sich Lichtwellen als Kugelwelle ausbreiten, und das in allen Bezugssystemen.

Die Bedingung, die in allen Systemen erfüllt sein muss, ist folgende:

$$\|\mathrm{x}\| = 0 \iff c^2\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 = 0 \iff c^2 t^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{1}$$

Wir fordern für das System K', dass die gleiche Bedingung erfüllt ist:

$$c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \tag{2}$$

Nun suchen wir eine Transformation Λ, die genau dies erfüllt.

Die Homogenität der y-z-Ebene bedeutet hier, dass $y = y'$ und $z = z'$ gelten muss. Wäre dies nicht der Fall, wäre mindestens ein Punkt auf der y-z-Ebene ausgezeichnet, der Raum wäre nicht mehr homogen.

Wenn wir nun die t und z Transformationen, die auf dem Aufgabenblatt gegeben sind, benutzen, können wir zeigen, dass diese die Bedingung erfüllen. Die Transformationen sind:

$$x' = -vft + fx \tag{3a}$$
$$t' = gt - vhx \tag{3b}$$

Wir zeigen nun, dass wenn (2) und (3) gilt, daraus (1) folgt.

$$\begin{aligned}
c^2 t'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\
c^2\left(gt - vhx\right)^2 &= \left(-vft + fx\right)^2 + y^2 + z^2 \\
c^2\left(g^2t^2 - 2gtvhx + v^2h^2x^2\right) &= v^2f^2t^2 - 2vf^2tx + f^2x^2 + y^2 + z^2 \\
\left(-v^2f^2 + c^2g^2\right)t^2 &= \left(-2vf^2 + 2c^2gvh\right)tx + \left(f^2 - c^2v^2h^2\right)x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

Das ganze führt allerdings nur dann zu sinnvollen Ergebnissen, wenn gilt:

$$-v^2 f^2 + c^2 g^2 = c^2$$
$$f^2 - c^2 v^2 h^2 = 1$$
$$-2vf^2 + 2c^2 gvh = 0$$

$$g^2 - \frac{v^2}{c^2} f^2 = 1$$
$$f^2 - c^2 v^2 h^2 = 1$$
$$f^2 - c^2 gh = 0$$

Hier fehlen noch Inhalte.

H 11.3.2 Verträglichkeit

Wir schreiben die Hin- und Rücktransformation als Matrix, die auf den Ortstensor x angewendet werden kann:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} g & -vh & 0 & 0 \\ -vf & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} g & vh & 0 & 0 \\ vf & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll gerade $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$ gelten. Wir führen die Matrixmultiplikation aus und erhalten:

$$\begin{pmatrix} g^2 - v^2 hf & gvh - fhv & 0 & 0 \\ gvh - fhv & -v^2 hf + f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

Daraus ziehen wir die gesuchten Bedingungen:

$$g^2 - fhv^2 = 1$$
$$ghv - fhv = 0$$
$$f^2 - v^2 hf = 1$$

Diese vereinfachen wir zu:

$$f^2 - fhv^2 = 1, \quad f = g$$

H 11.3.3 physikalische Größe

Mit „physikalische[r] Größe“ ist ein Objekt gemeint? Ansonsten wissen wir nicht, wie sich eine physikalische Größe wie zum Beispiel die Entropie sich mit einer Geschwindigkeit u' parallel bewegen sollte.

Hier fehlen noch Inhalte.

Wenn wir $u' = c$ und $v = c$ einsetzen, soll deren Summe gerade wieder c sein. Somit muss

$$1 + vu'\frac{h}{f} = 2$$

gelten. Dies kann nur erfüllt sein, wenn $h/f = 1/\left(c^2\right)$ ist.