

Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik321 – Übung 9

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 9.1	H 9.2	H 9.3	Σ
Punkte	/ 10	/ 10	/ 10	/ 30

H 9.1 inhomogene Wellengleichung

Die interessanten Maxwellgleichungen im Vakuum (ohne Ladungen und Ströme) sind:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$$

Für die erste Wellengleichung, $\square \mathbf{E} = \lambda$, bilde ich die Rotation der ersten Gleichung und leite die zweite nach der Zeit ab:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \dot{\mathbf{B}} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$$

Außerdem ist $\nabla \times \nabla \times \mathbf{x} = \nabla \langle \nabla, \mathbf{x} \rangle - \Delta \mathbf{x}$. Wobei hier die Divergenzen alle 0 sind.

Mit diesen Vorüberlegungen kann ich die erste Wellengleichung umformen:

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &= \lambda_1 \\ \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} &= \lambda_1 \\ -\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{E}} &= \lambda \end{aligned}$$

Wir setzen eine der Gleichungen ein.

$$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \lambda_1$$

Die Rotation können wir aufheben. Dabei müssen wir einen beliebigen Gradienten addieren.

$$-\nabla \times \mathbf{E} - \dot{\mathbf{B}} = \lambda_1 + \nabla \phi$$

Die linke Seite ist gerade die negative Stromdichte, die hier allerdings 0 ist.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + \nabla \phi \\ \lambda_1 &= -\nabla \phi \end{aligned}$$

Die Funktion λ_1 ist also ein beliebiger Gradient.

Analog bilden wir anders herum Rotation und Zeitableitung der beiden Gleichungen:

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} + \ddot{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \nabla \times \dot{\mathbf{D}} = 0$$

Nun können wir wieder die Wellengleichung umformen:

$$\begin{aligned} \square \mathbf{B} &= \lambda_2 \\ \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} &= \lambda_2 \\ -\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}} &= \lambda_2 \\ -\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \nabla \times \dot{\mathbf{E}} &= \lambda_2 \end{aligned}$$

Wir nehmen wieder eine Rotation weg und addieren einen Gradienten.

$$\begin{aligned} -\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} &= \lambda_2 + \nabla \psi \\ 0 &= \lambda_2 + \nabla \psi \\ \lambda_2 &= -\nabla \psi \end{aligned}$$

Die zweite Funktion λ_2 ist also wieder ein Gradient.

H 9.2 zirkular polarisierte Welle

H 9.2.1 Magnetfeld

Gegeben ist das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left(f(x - ct) (\hat{\mathbf{e}}_y + i\hat{\mathbf{e}}_z) \right)$$

Wir bilden die Rotation dieses Feldes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \text{Re} \left(f'(x - ct) (-i\hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_z) \right)$$

Dies integrieren wir nach der Zeit und wählen alle Integrationskonstanten gleich 0:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \text{Re} \left(f(x - ct) (i\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z) \right)$$

H 9.2.2 Energiedichten

Wir bestimmen die Energiedichte:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} (\langle \mathbf{B}, \mathbf{H} \rangle + \langle \mathbf{D}, \mathbf{E} \rangle) \\ &= \frac{1}{2} f(x - ct) f^*(x - ct) \left(\frac{1}{c^2} \frac{1}{\mu_0} (i\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z) (-i\hat{\mathbf{e}}_y - \hat{\mathbf{e}}_z) + \epsilon_0 (\hat{\mathbf{e}}_y + i\hat{\mathbf{e}}_z) (\hat{\mathbf{e}}_y - i\hat{\mathbf{e}}_z) \right) \\ &= 2\epsilon_0 f(x - ct) f^*(x - ct) \end{aligned}$$

Und die Energiestromdichte:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{c\mu} f(x-ct) f^*(x-ct) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} f(x-ct) f^*(x-ct) \hat{e}_x \end{aligned}$$

Es fehlt der Spannungstensor \mathbf{G} :

$$G^{\alpha\beta} = \omega \delta^{\alpha\beta} - \varepsilon_0 E^\alpha B^\beta - \frac{1}{\mu_0} B^\alpha B^\beta$$

Oder als ganzer Tensor geschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \omega \mathbf{1} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} - \text{Re} \left(f^2(x-ct) \left(\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{c^2 \mu_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= f(x-ct) f^*(x-ct) \varepsilon_0 \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= 2f(x-ct) f^*(x-ct) \varepsilon_0 \mathbf{1} \end{aligned}$$

Die Diagonalform heißt wohl, dass dieses Feld nur Druck und keine Scherspannung ausübt.

H 9.3 Coulomb- und Lorenzeichung

H 9.3.1 Begründung und Bestimmungsgleichungen

Da $\langle \nabla, \mathbf{B} \rangle = 0$ gilt, kann ist dieses ein reines Wirbelfeld. Ein solches kann immer als Rotation eines anderen Feldes, \mathbf{A} geschrieben werden:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Für den elektrostatischen Fall gilt $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, so dass sich dieses als Gradient eines skalaren Feldes, $\varphi + c_1$ schreiben lässt:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi$$

Für den elektrodynamischen, aber ladungsfreien Fall gilt $\langle \nabla, \mathbf{E} \rangle = 0$. Außerdem gilt $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Wir setzen die Induktion ein und erhalten:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \dot{\mathbf{A}} \iff \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}} - \nabla \psi$$

Durch die Linearität der Differentialgleichung können wir beide Fälle zusammensetzen und erhalten:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \dot{\mathbf{A}}$$

H 9.3.2 Eichinvarianz der Potentiale

In der vorherigen Aufgabe haben wir bei der Integration schon die Freiheiten c_1 und $\nabla\psi$ eingefügt. Das Vektorpotential \mathbf{A} ist nur bis auf einen Gradienten bestimmt, das skalare Potential φ nur bis auf eine additive Konstante.

H 9.3.3 Coulombbeziehung

Wir betrachten die inhomogenen Maxwellgleichungen:

$$\langle \nabla, \mathbf{E} \rangle = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = \mu \mathbf{j}$$

Dort setzen wir unsere Potentiale ein und erhalten nach einigen Umformungen folgendes Gleichungssystem:

$$\nabla \left(\langle \nabla, \mathbf{A} \rangle + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi} \right) - \square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (1a)$$

$$\Delta \varphi + \langle \nabla, \dot{\mathbf{A}} \rangle = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1b)$$

Nun setzen wir $\langle \nabla, \mathbf{A} \rangle = 0$ ein und vereinfachen das System zu:

$$-\frac{1}{c^2} \nabla \dot{\varphi} + \square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} \quad (2a)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2b)$$

Gleichung (2b) ist gerade die aus der Elektrostatik. Diese können wir mit einem Poissonintegral lösen und erhalten:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3)$$

Gleichung (2a) formen wir um und erhalten eine Gleichung für das \mathbf{A} -Feld:

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \dot{\varphi}$$

Wir setzen (3) in die obige Gleichung ein und erhalten bis auf eine harmonische Funktion f :

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int d^3r' \frac{\dot{\varphi}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + f \quad (4)$$

Nun benutzen wir die Kontinuitätsgleichung. Diese lautet:

$$\dot{\rho} + \langle \nabla, \mathbf{j} \rangle = 0 \iff \varepsilon \nabla \dot{\varphi} = \langle \nabla, \mathbf{j} \rangle$$

Gleichung (4) wird zu:

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j} - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int d^3r' \frac{\langle \nabla, \mathbf{j} \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Die Differenz auf der rechten Seite können wir als Rotation schreiben. Ein Vektorfeld lässt sich in ein Quellen- und ein Wirbelfeld zerlegen. Dies ist der erste Summand. Davon ziehen wir den Quellenteil (zweiter Summand) ab, es bleibt der Wirbelteil:

$$\square \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \int d^3r' \frac{\nabla \times \mathbf{j}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

H 9.3.3c Lösung im Vakuum**H 9.3.3c warum „transversal“?**

Wir haben $\square A$ ausschließlich durch die transversale Stromdichte ausgedrückt, daher wird dies *transversale Eichung* genannt.

H 9.3.4 Lorenzeichung

Wir hatten das Gleichungssystem (1). Dort setzen wir in beide Gleichungen $\langle \nabla, \mathbf{A} \rangle + \frac{1}{c^2} \dot{\phi} = 0$ ein und erhalten:

$$\square A = \mu j, \quad \square \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Somit sind die Gleichungen entkoppelt.