Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 7

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 7.1	H 7.2	H 7.3	$\sum$
Punkte	/ 20	/ 10	/ 10	/ 40

H 7.1 Reflexion und Transmission

H 7.1.1 Brechungsgesetz, Amplituden

Einfallswinkel Es soll gerade gelten, dass für alle $\boldsymbol{r}$ entlang der Grenzschicht die gleiche Phase herrscht. Somit muss gelten:

$$\exp\left(i\left(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t\right)\right) = \exp\left(i\left(\left\langle \boldsymbol{k}'', \boldsymbol{r}\right\rangle - \omega t\right)\right)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle &= \left\langle \boldsymbol{k}'', \boldsymbol{r}\right\rangle \\ kr\cos(\alpha) &= k''r\cos\left(\alpha''\right) \end{aligned}$$

Da allerdings gerade $k = k''$ gilt, folgt:

$$\alpha = \alpha''$$

Somit ist Einfalls- gleich Ausfallswinkel.

Brechungsgesetz Wir setzen analog an:

$$\begin{aligned} \exp\left(i\left(\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}\rangle - \omega t\right)\right) &= \exp\left(i\left(\left\langle \boldsymbol{k}', \boldsymbol{r}\right\rangle - \omega t\right)\right) \\ k\cos(\alpha) &= k'\cos\left(\alpha'\right) \\ \sqrt{\varepsilon\mu}\cos(\alpha) &= \sqrt{\varepsilon'\mu'}\cos\left(\alpha'\right) \\ \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha')} &= \frac{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \\ \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha')} &= \frac{n'}{n} \end{aligned}$$

Allerdings ist α der Winkel zwischen Strahl und Grenzfläche. Wir setzen $\theta = \pi/2 - \alpha$ ein und erhalten das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta')} = \frac{n'}{n}$$

Amplituden Es sollen die vier Relationen hergeleitet werden.

An der Grenzfläche gilt:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = 0, \quad \langle \nabla, \boldsymbol{D} \rangle = 0$$

1. Daraus können wir ableiten, dass die zur Grenzfläche parallele Komponente stetig sein muss. Die parallelen Komponenten erhalten wir durch Projektion der zur Ebene parallelen Komponenten mit $\cos(\theta)$ und $\cos(\theta')$:

$$\left(E_{\|} - E''_{\|}\right)\cos(\theta) - E'_{\|}\cos(\theta') = 0$$

2. Für die zur Ebene parallele Komponente gilt auch eine Erhaltung der projizierten Normalenkomponente aufgrund von $\langle \nabla, \boldsymbol{D} \rangle = 0$. Diese skaliert mit dem Sinus der Winkel. Für das $\boldsymbol{E}$-Feld müssen wir noch das ϵ' mitnehmen. Somit gilt:

$$E_{\|}\sin(\theta) - E''_{\|}\sin(\theta'') = E'_{\|}\sin(\theta')\epsilon'$$

Wir benutzen $\theta = \theta''$.

$$\left(E_{\|} - E''_{\|}\right)\sin(\theta) = E'_{\|}\sin(\theta')\epsilon'$$

Wir setzen das Brechungsgesetz ein.

$$\left(E_{\|} - E''_{\|}\right) = E'_{\|}\epsilon'\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu'\epsilon'}}$$
$$\left(E_{\|} - E''_{\|}\right) = E'_{\|}\sqrt{\frac{\mu\epsilon\mu'}{\epsilon'}}$$
$$\left(E_{\|} - E''_{\|}\right)\sqrt{\frac{1}{\mu\epsilon}} = E'_{\|}\sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}$$

Das ist zwar so grob in die richtige Richtung, allerdings solle eigentlich $\sqrt{\epsilon/\mu}$ auf beiden Seiten stehen.

3. Die senkrechte Komponente muss genauso wie in der ersten Relation stetig sein. Dabei müssen wir hier allerdings nicht projizieren. Somit gilt direkt:

$$E_{\perp} - E''_{\perp} + E'_{\perp} = 0$$

Die gesuchte Relation ist allerdings:

$$E_{\perp} + E''_{\perp} - E'_{\perp} = 0$$

Das zusätzliche Minuszeichen kommt vielleicht daher, dass die reflektierte Welle am optisch dichteren Medium um π Phasenverschoben wird.

4. Hier fehlen noch Inhalte.

H 7.1.2 Reflexions- und Transmissionsfaktor

Hier fehlen noch Inhalte.

H 7.2 Reflexion von unpolarisiertem Licht

Hier fehlen noch Inhalte.

H 7.3 Isolator im elektromagnetischen Feld

H 7.3.1 Maxwellgleichungen

Im Isolator mit μ_r und ε_r können wir $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{H}$ ersetzen und erhalten:

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{E} \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{B} \rangle = 0, \quad \frac{1}{\mu_r \mu_0} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_r \varepsilon_0 \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0}$$

H 7.3.2 homogene Wellengleichung

Wir stellen die letzte Gleichung um, bilden die Rotation der Dritten und erhalten:

$$\ddot{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{E}} = -c^2 \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = -c^2 \left(\boldsymbol{\nabla} \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{B} \rangle - \triangle \boldsymbol{B} \right) = c^2 \triangle \boldsymbol{B}$$

Somit gilt $\square \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

H 7.3.3 Berechnung des magnetischen Flusses

Das $\boldsymbol{E}$-Feld breitet sich in z-Richtung aus. Somit muss das $\boldsymbol{B}$-Feld dies auch tun. Außerdem handelt es sich hier um ebene Wellen, so dass $\partial_x \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ und $\partial_y \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ gelten muss. Wir setzen das gegebene elektrische Feld dritte Gleichung ein und erhalten als Differentialgleichung:

$$c^2 \begin{pmatrix} -\partial_z B_y \\ \partial_z B_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E_0}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\mathrm{i}(kz - \omega t)\right)(-\mathrm{i}\omega)$$

Die ersten beiden Zeilen können wir integrieren und erhalten (von einer additiven harmonischen Funktion abgesehen):

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\omega}{k} \frac{E_0}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\mathrm{i}(kz - \omega t)\right)$$

Die Polarisierung ist linear. Dabei sind $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld und $\pi/2$ phasenverschoben, das letztere vor dem ersteren (siehe Abbildung 1). Beide Felder schwingen in der Ebene, die von ihrem Feld und der z-Achse aufgespannt wird.

H 7.3.4 Berechnung des elektrischen Feldes

Wir setzen analog zur Aufgabe H 7.3.3 an und erhalten als Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x \\ 0 \end{pmatrix} = B_0 \omega \begin{pmatrix} \sin(kz - \omega t) \\ -\cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

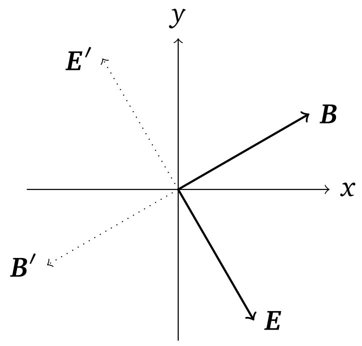

Abbildung 1: Polarisation der Felder in Aufgabe H 7.3.3

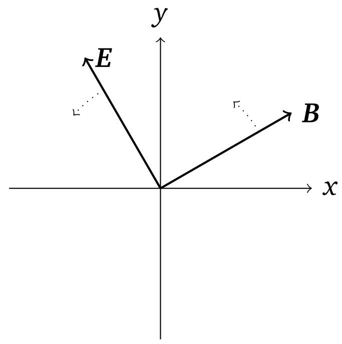

Abbildung 2: Polarisation der Felder in Aufgabe H 7.3.4

Durch Integration erhalten wir (bis auf eine harmonische Funktion):

$$\boldsymbol{E} = B_0 \frac{\omega}{k} \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese Welle ist zirkulär polarisiert. Dabei ist das $\boldsymbol{E}$- um $\pi/2$ vor dem $\boldsymbol{B}$-Feld. Ein bestimmter Zeitpunkt ist in Abbildung 2 gezeigt.