Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 6

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 6.1	H 6.2	H 6.3	H 6.4	$\sum$
Punkte	/ 10	/ 10	/ 20	/ 10	/ 50

H 6.1 Lorenzkraft

H 6.1.1 qualitative Teilchenbahn und Bewegungsgleichungen

Das Teilchen ist im konservativen $\boldsymbol{E}$-Feld. Dort fällt es entlang des Feldes, wird allerdings vom $\boldsymbol{B}$-Feld abgelenkt und wird gegen das Feld gelenkt. Das Teilchen kommt nur so weit, bis es die z-Stelle des Anfangspunkts erreicht hat. Das ganze hatte ich in der Schule in einer Aufgabe, dazu hatte ich ein Programm geschrieben[1]. Ein Bildschirmfoto des Programms ist in Abbildung 1.

Das Teilchen bewegt sich auf einer Zykloiden, im Mittel senkrecht zu $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Feld, also entlang der y-Achse.

Die Kraft auf das Teilchen ist:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

In Komponenten geschrieben:

$$\ddot{r}^i = \frac{q}{m}\left(E\delta^i{}_z + \epsilon^i{}_{jk}\dot{r}^j B\delta^k{}_x\right)$$

[1] http://martin-ueding.de/projects/van-allen-sim-3d/

Abbildung 1: Bildschirmfoto des Programms

Daraus ergeben sich drei gekoppelte, partielle Differentialgleichungen:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = \frac{q}{m}\dot{z}B, \quad \ddot{z} = \frac{q}{m}\left(E - \dot{y}B\right)$$

Für x gilt aufgrund der Anfangsbedingungen: $x(t) = 0$. Die Gleichungen für y und z können wir jeweils nach der Zeit ableiten und in die Andere einsetzen. So erhalten wir zwei unabhängige Differentialgleichungen höherer Ordnung:

$$\dddot{y} = \frac{q^2}{m^2}BE - \frac{q^2}{m^2}B^2\dot{y}, \quad \dddot{z} = -\frac{q^2}{m^2}B^2\dot{z}$$

Diese Bewegungen sind, von additiven linearen Bewegungen abgesehen, harmonische Schwingungen.

H 6.1.2 Lösung der Gleichungen

Die zu y gehörige homogene Gleichung können wir durch Kosinus und Sinus lösen:

$$y_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

Dabei haben wir schon die Ersetzung $\omega := qB/m$ vorgenommen. Als inhomogene Lösung erraten wir:

$$y_p(t) = \frac{E}{B}t + c_3$$

Somit gilt für y:

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \frac{E}{B}t + c_3$$

Ähnlich gehen wir für z vor und erhalten:

$$z(t) = c_4 \cos(\omega t) + c_5 \sin(\omega t) + c_6$$

Die komplette Lösung für den Positionsvektor $\boldsymbol{r}$ ist somit:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_4 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ c_5 \end{pmatrix} \sin(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{B} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ c_6 \end{pmatrix}$$

Nun war in der Aufgabenstellung gefordert, dass $\boldsymbol{r}(0) = \dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{0}$. Die Ableitung nach der Zeit ist:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega c_1 \\ -\omega c_4 \end{pmatrix} \sin(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega c_2 \\ \omega c_5 \end{pmatrix} \cos(\omega t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{B} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir:

$$c_2 = -\frac{E}{\omega B}, \quad c_5 = 0$$

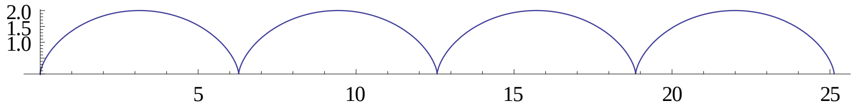

Abbildung 2: Bahnkurve $\boldsymbol{r}(t)$ für $t \in (0, 15)$

Weil wir die Gleichungen zur Lösung noch einmal abgeleitet hatten, müssen wir noch die Bedingung $\ddot{\boldsymbol{r}}(0) = \frac{q}{m} E \hat{\boldsymbol{e}}_z$ erfüllen. Somit erhalten wir noch:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega^2 c_1 \\ -\omega^2 c_4 \end{pmatrix} = \frac{q}{m} E \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dies können wir umstellen und erhalten zusammen mit $c_1 + c_3 = 0$ sowie $c_4 + c_6 = 0$ aus $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = \boldsymbol{0}$:

$$c_1 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{E}{\omega B}, \quad c_6 = \frac{E}{\omega B}$$

Alles zusammen ergibt die Bahnkurve:

$$\boldsymbol{r}(t) = -\frac{E}{\omega B} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{B} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E}{\omega B} \end{pmatrix}$$

Die Bahnkurve ist für $t \in (0, 15)$ in Abbildung 2 dargestellt. Dies stimmt mit den Überlegungen und der Simulation (Abbildung 1) überein.

H 6.2 Kraft auf elementaren Dipol

Zuerst bestimmen wir das magnetische Moment der Leiterschleife. Die Definition lautet:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 x \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \right)$$

Da nur auf der Leiterschleife Strom fließt, können wir das Integral auf die vier Kanten zerlegen. Dabei gehen wir davon aus, dass der Strom gemäß der rechten Hand um die x-Achse fließt. Wir könnten die Stromdichte aus einer Summe von δ-Distributionen zusammensetzen, diesen Schritt überspringen wir. Das magnetische Moment ist also über alle vier Kanten zusammen:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m} &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \right) \\
&= \frac{1}{2} I \left(\int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \hat{\boldsymbol{e}}_y + \int_0^\varepsilon \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \\ z \end{pmatrix} \times \hat{\boldsymbol{e}}_z - \int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ \varepsilon \end{pmatrix} \times \hat{\boldsymbol{e}}_y - \int_0^\varepsilon \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \times \hat{\boldsymbol{e}}_z \right) \\
&= \frac{1}{2} I \left(\int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} + \int_0^\varepsilon \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right) \\
&= I \varepsilon^2 \hat{\boldsymbol{e}}_x
\end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem in der Aufgabenstellung gegebenen Betrag $m = I\varepsilon^2$ überein.

Nun betrachten wir die Kraft auf das Leiterschlaufe:

$$\boldsymbol{F} = \oint \mathrm{d}l \, (\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B})$$

Die magnetische Flussdichte können wir mit der gegebenen Näherung annähern. Dabei schreiben wir $B_{0,i} := B_i(0,0,0)$, und $B_i := \frac{\partial B}{\partial i}\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}}$.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} + B_y y \\ B_{0,z} \end{pmatrix} + \int_0^\varepsilon \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} + B_y \varepsilon \\ B_{0,z} + B_z z \end{pmatrix} \\
&\quad - \int_0^\varepsilon \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} + B_y y \\ B_{0,z} + B_z \varepsilon \end{pmatrix} - \int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{0,x} \\ B_{0,y} \\ B_{0,z} + B_z z \end{pmatrix} \\
&= I \left(\int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} B_{0,z} \\ 0 \\ -B_{0,x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{0,z} + B_{0,z}\varepsilon \\ 0 \\ -B_{0,x} \end{pmatrix} \right) + I \left(\int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} -B_{0,y} - B_y \varepsilon \\ B_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B_{0,y} \\ B_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= I\varepsilon \left(\left(\begin{pmatrix} B_{0,z} \\ 0 \\ -B_{0,x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{0,z} + B_{0,z}\varepsilon \\ 0 \\ -B_{0,x} \end{pmatrix} + \int_0^\varepsilon \mathrm{d}y \begin{pmatrix} -B_{0,y} - B_y \varepsilon \\ B_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -B_{0,y} \\ B_{0,x} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

Der konstante Teil des Magnetfeldes hat nette keine Kraft auf die Leiterschleife, da der Strom in den gegenüberliegenden Seiten gerade entgegengesetzt fließt.

$$\begin{aligned}
&= I\varepsilon^2 \left(-B_z - B_y \right) \hat{\boldsymbol{e}}_x \\
&= -I\varepsilon^2 \left\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{B} \right\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_x
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können wir Gradienten von B_x addieren, weil es durch die Näherung konstant ist und somit 0 addiert wird.

$$= -I\varepsilon^2 \left(\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{B} \right\rangle \hat{\boldsymbol{e}}_x - \boldsymbol{\nabla} B_x \right)$$

Ab hier betrachten wir noch noch die i-Komponente der Kraft.

$$F^i = -I\varepsilon^2 \left(\delta^i{}_x \partial_b B^b - \partial^i B_x \right)$$

Hier führen wir noch mehr Indizes ein.

$$\begin{aligned}
&= -I\varepsilon^2 \left(\delta_k{}^b \delta^i{}_x \partial_b B^k - \delta_{kx} \delta^{ib} \partial_b B^k \right) \\
&= I\varepsilon^2 \left(\delta_{kx} \delta^{ib} - \delta_k{}^b \delta^i{}_x \right) \partial_b B^k
\end{aligned}$$

Diese vier δ können wir nun als zwei, mit einem Index kontrahierten, $\boldsymbol{\epsilon}$-Tensoren zusammenfassen.

$$= \epsilon_{jk}{}^i \epsilon^j{}_x{}^b I\varepsilon^2 \partial_b B^k$$

Wir führen einen weitern Index a ein.

$$= \epsilon_{jk}{}^i \epsilon^j{}_a{}^b I\varepsilon^2 \delta_x{}^a \partial_b B^k$$

Jetzt können wir das vorher bestimmte magnetische Moment $\boldsymbol{m}$ einsetzen. Dabei müssen wir natürlich nur die entsprechende, x-Komponente einsetzen.

$$= \epsilon_{jk}{}^{i} \epsilon^{j}{}_{a}{}^{b} m^{a} \partial_{b} B^{k}$$

Nun permutieren wir die Indizes am ersten $\boldsymbol{\epsilon}$-Tensor.

$$= \epsilon^{i}{}_{jk} \epsilon^{j}{}_{a}{}^{b} m^{a} \partial_{b} B^{k}$$

Zur Übersicht können wir noch den mittleren Term als eigenen Vektor schreiben.

$$= \epsilon^{i}{}_{jk} \left(\epsilon_{na}{}^{b} m^{a} \partial_{b} \hat{\boldsymbol{e}}^{n} \right)^{j} B^{k}$$

Dies ist nun ein doppeltes Kreuzprodukt.

$$= (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{\nabla}) \times B$$

Und das ist genau die gesuchte Relation.

H 6.3 Helmholtz-Spulen

H 6.3.1 Herleitung des Potentials

Die Stromdichte der einen Spule bei $z = +a$ ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = I \delta(z - a) \delta\left(\rho - R\right) \hat{\boldsymbol{e}}_{\phi}(\boldsymbol{r})$$

Das Vektorpotential ist definiert als:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}'\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Wir setzen die Stromdichte in das Vektorpotential ein und erhalten das Integral:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho' \rho' \frac{I \delta\left(z' - a\right) \delta\left(\rho' - R\right) \hat{\boldsymbol{e}}_{\phi'}\left(\boldsymbol{r}'\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Durch die Rotationssymmetrie können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\phi = 0$ (nicht ϕ'!) betrachten. Außerdem wechseln wir für $\boldsymbol{A}$ in kartesische Koordinaten, für die Integrale allerdings nicht. Wir setzen $\hat{\boldsymbol{e}}_{\phi'} = \left(-\sin\left(\phi'\right), \cos\left(\phi'\right), 0\right)^T$ ein.

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho' \rho' \frac{I \delta\left(z' - a\right) \delta\left(\rho' - R\right) \left(-\sin\left(\phi'\right), \cos\left(\phi'\right), 0\right)^T}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Ab hier betrachten wir noch die y-Komponente von $\boldsymbol{A}$.

$$A_y(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho' \rho' \frac{I \delta\left(z' - a\right) \delta\left(\rho' - R\right) \cos\left(\phi'\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Wir setzen $\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|$ ein. Dabei rechnen wir vorher in kartesische Koordinaten um, da der Abstand in Zylinderkoordinaten nicht wirklich übersichtlich sein wird. Dann führen wir die beiden inneren Integrale aus, die durch die δ-Distributionen nur Werte für ρ' und z' festlegen.

$$A_y(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \frac{\cos(\phi')}{\sqrt{R^2 - 2R\rho\cos(\phi') + (a-z)^2}}$$

Dieses Integral ist so nicht direkt lösbar. Wir dürfen hier annehmen, dass $\rho \ll R$ ist und wir es um $\rho = 0$ entwickeln dürfen. Diese Entwicklung führt mit $b_0 = 1$, $b_1 = 1/2$, $b_2 = 3/2$ und $b_3 = 5/2$ nach Umformungen auf:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \cos(\phi') \sum_{n=0}^{3} \left(R^2 + (a-z)^2\right)^{-1/2-n} b_n (R\rho)^n \cos^n(\phi') + \mathcal{O}(\rho^4) \\
&= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \sum_{n=0}^{3} \left(R^2 + (a-z)^2\right)^{-1/2-n} b_n (R\rho)^n \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \cos^{n+1}(\phi') + \mathcal{O}(\rho^4)
\end{aligned}$$

Die Integrale über die Potenzen von Kosinus lassen sich mit den Potenzformeln bestimmen. Die Resultate sind für $n = 0$: 0 und $n = 1$: π und $n = 2$: 0 sowie $n = 3$: $3\pi/4$. Dies kürzt das π im Vorfaktor. Damit können wir nun A_y ohne Integrale schreiben:

$$= \frac{\mu_0 IR}{4} \left(\left(R^2 + (a-z)^2\right)^{-3/2} R\rho + \frac{15}{8} \left(R^2 + (a-z)^2\right)^{-7/2} R^3 \rho^3 \right) + \mathcal{O}(\rho^4)$$

Dies entwickeln wir noch um $z = 0$, da $z \ll a$ angenommen werden darf.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 IR}{4} \left(\left(R^2 + a^2\right)^{-3/2} R\rho + \frac{15}{8} \left(R^2 + a^2\right)^{-7/2} R^3 \rho^3 \right) \\
&\quad + \frac{\mu_0 IR}{4} \left(3\left(R^2 + a^2\right)^{-5/2} R\rho a z + \frac{15}{2} \left(R^2 + a^2\right)^{-7/2} R\rho a^2 z^2 \right) \\
&\quad + \mathcal{O}\left((\rho + z)^4\right)
\end{aligned}$$

Wir addieren nun ein zweites $\boldsymbol{A}$, das allerdings bei $a = -a$ positioniert ist. Damit haben wir ein Spulenpaar. Der in a lineare Teil des $\boldsymbol{A}$-Feldes wird sich gerade aufheben, so dass nur noch der Konstante und quadratische Term übrig bleibt. Somit verdoppelt sich das Feld zu:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_y(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0 IR}{2} \left(\left(R^2 + a^2\right)^{-3/2} R\rho + \frac{15}{8} \left(R^2 + a^2\right)^{-7/2} R^3 \rho^3 \right) \\
&\quad - \frac{\mu_0 IR}{2} \frac{15}{2} \left(R^2 + a^2\right)^{-7/2} R\rho a^2 z^2 + \mathcal{O}\left((\rho + z)^4\right)
\end{aligned}$$

Dies können wir noch weiter zusammenfassen.

$$= \frac{\mu_0 IR^2 \rho}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{R^2\rho^2 + 4a^2 z^2}{\left(R^2 + a^2\right)^2} \right) + \mathcal{O}\left((\rho + z)^4\right)$$

Dies ist fast der Ausdruck, der auf dem Aufgabenblatt steht, allerdings fehlt noch ein Summand

$$-\frac{3}{2} \frac{z^2 + \rho^2}{R^2 + a^2}$$

in der Klammer. Ein Term müsste noch per Produktregel enstehen und hätte im Nenner dann tatsächlich $R^2 + a^2$, allerdings nur z^2, kein $+\rho^2$.

H 6.3.2 homogenes Feld

Es soll gezeigt werden, dass das Feld bei $R = 2a$ homogen ist. Dazu bilde ich $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ in Zylinderkoordinaten. Es gilt $\boldsymbol{A} = A_y \hat{\boldsymbol{e}}_\phi$. Die Rotation ist:

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_\phi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \left(\rho A_\phi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dabei sind nur zwei Terme nicht null. Diese sind:

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I \rho R^2}{2\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \left(-\frac{3z}{R^2 + a^2} + \frac{15 a^2 z}{\left(R^2 + a^2\right)^2} \right)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho A_\phi\right)}{\partial \rho} = \frac{\mu_0 I \rho R^2}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{z^2 + \rho^2}{R^2 + a^2} + \frac{15}{8} \frac{R^2 \rho^2 + 4 a^2 z^2}{\left(R^2 + a^2\right)^2} - \frac{3\rho^2}{R^2 + a^2} + \frac{15}{4} \frac{R^2 \rho^2}{\left(R^2 + a^2\right)^2} \right)$$

Wir kombinieren die beiden Komponenten und setzen $R := 2a$ ein. Damit fallen alle Terme in den Klammern, bis auf die 1 im zweiten Term weg, so dass das $\boldsymbol{B}$-Feld ist:

$$\boldsymbol{B} = \frac{4 \mu_0 I a^2}{\left(5a^2\right)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Dies ist in der Tat homogen in ρ und z.

H 6.4 Eigenschaften ebener elektromagnetischer Wellen