Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 5

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 5.1	H 5.2	H 5.3	$\sum$
Punkte	/ 20	/ 10	/ 10	/ 40

H 5.1 Magnetfeld an Grenzflächen

H 5.1.1 Gradient

Es gibt keine Stromdichte, somit gilt überall $\boldsymbol{j} = 0$. Daraus folgt für $\boldsymbol{H}$:

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} = 0$$

Somit ist $\boldsymbol{H}$ rotationsfrei und kann als Gradient geschrieben werden.

Die magnetische Flussdichte setzt sich aus der Erregung und Magnetisierung zusammen:

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

Da allerdings auch $\langle \nabla, \boldsymbol{B} \rangle = 0$ gelten muss, gilt $\langle \nabla, \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \rangle = 0$.

Mit dem Poissonintegral können wir das skalare Potential φ_m bestimmen [**?**, Seite 200]:

$$\begin{aligned}
\varphi_m(\boldsymbol{r}) &= -\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{\left\langle \nabla, \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{r}'\right) \right\rangle}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= -\frac{M_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int \mathrm{d}^3 r' \, \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \\
&= -\frac{M_0}{4\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{4\pi R^3}{3r} \\
&= \frac{M_0 R^3 \cos\left(\angle\left(\boldsymbol{r}, \hat{\boldsymbol{e}}_z\right)\right)}{3r}
\end{aligned}$$

Das magnetische Moment der Kugel ist, da das Feld homogen ist:

$$\boldsymbol{m} = \int \mathrm{d}^3 r' \, \boldsymbol{M}\left(\boldsymbol{r}'\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 M_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1}$$

Zusammen erhalten wir:

$$\varphi_m(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{r} \rangle}{r^3}$$

H 5.1.2 Magnetfeld innerhalb und außerhalb

Das Magnetfeld außerhalb lässt sich als Gradient des skalaren Potentials ausdrücken:

$$\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_m = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} - 3\frac{\langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{r}\rangle\, \boldsymbol{r}}{r^5}\right)$$

Für das Innere der Kugel ist das Magnetfeld durch die Magnetisierung gegeben. Daher gilt: $\boldsymbol{M} = \chi_M \boldsymbol{H}$. Da die Magnetisierung homogen ist, ergibt dies ein homogenes Magnetfeld innerhalb:

$$\boldsymbol{H} = \frac{M_0}{\chi_M}\hat{\boldsymbol{e}}_z$$

H 5.1.3 Oberflächenstromdichte

Es soll erklärt werden, warum die Oberflächenstromdichte folgende Form haben muss:

$$\boldsymbol{j} = \alpha(\theta)\,\delta(r - R)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

Damit die Magnetisierung parallel zur z-Achse ist, muss der Strom ein Wirbelfeld um die z-Achse sein. Die Richtung von ϕ sind konzentrische Kreise um die z-Achse, womit der Strom in $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$ Richtung fließen muss. Daher das $\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$.

Das magnetische Moment ist definiert als:

$$m := \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r\, \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\right)$$

Dies muss gerade (1) sein. Somit erhalten wir als Gleichung für $\boldsymbol{j}$:

$$\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r\, \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 M_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z$$

Wir können $\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{e}}_\phi = -r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ in das Integral für die Stromdichte einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r\, r\alpha(\theta)\delta(r-R)r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}r\, r^2 \sin(\theta)\, r\alpha(\theta)\delta(r-R)r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, R^3 \sin(\theta)\,\alpha(\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta
\end{aligned}$$

An dieser Stelle setzen wir $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ in kartesischen Koordinaten ein, damit wir später auch ein $\hat{\boldsymbol{e}}_z$ erhalten können. Dieses ist: $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \left(\cos(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\cos(\theta), -\sin(\theta)\right)^T$.

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, R^3 \sin(\theta)\,\alpha(\theta)\begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta)\\ \sin(\phi)\cos(\theta)\\ -\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

Jetzt nutzen wir aus, dass $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, \cos(\phi) = 0$, sowie $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\, \sin(\phi) = 0$ und $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 2\pi$.

$$= \pi R^3 \hat{\boldsymbol{e}}_z \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)\,\alpha(\theta)$$

Dies sollte jetzt gerade $\frac{4}{3}\pi R^3 M_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z$ sein.

$$\begin{aligned}
\pi R^3 \hat{\boldsymbol{e}}_z \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)\,\alpha(\theta) &= \frac{4}{3}\pi R^3 M_0 \hat{\boldsymbol{e}}_z \\
\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)\,\alpha(\theta) &= \frac{4}{3} M_0 \\
\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \sin(\theta)\,\alpha(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \frac{4}{3} M_0 \\
\alpha(\theta) &= \frac{4}{3}\frac{1}{\pi} M_0 \csc^2(\theta)
\end{aligned}$$

Somit ist die Stromverteilung:

$$\boldsymbol{j} = \frac{4}{3\pi} M_0 \csc^2(\theta)\,\delta(r-R)\,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi$$

H 5.2 Konzentrische Zylinder mit Dielektrikum

Mit dem gaußschen Gesetz können wir herleiten, dass das Innere ($\rho < a$) feldfrei sein muss. Dazu wählen wir einen Zylinder mit Radius $R = a$. Dann liegt die Oberfläche im (feldfreien) Leiter. Aus Symmetriegründen geht nichts durch Boden und Deckel des Zylinders. Somit kann sich keine Ladung auf der Innenseite befinden.

Außerdem können wir ein Ringprisma mit Radien a und b konzentrisch in die Anordnung legen und damit feststellen, dass die Ladung pro Höhe auf der Außenseite des inneren und auf der Innenseite des Äußeren gleich sein muss. Mit einem Ringsektorprisma mit Bogenlänge $a\,\mathrm{d}\phi$ auf der Innenseite, $b\,\mathrm{d}\phi$ auf der Außenseite und Radius $b-a$ finden wir konkret für die Flächenladungsdichten:

$$\mathrm{d}\phi\left(a\sigma_a + b\sigma_b\right) = 0$$

Zwischen a und b muss das Potential φ die Laplacegleichung erfüllen. In Zylinderkoordinaten erhalten wir (durch die Symmetrie bezüglich ϕ und z vereinfacht):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) = 0$$

Die Differentialgleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{c_1}{\varphi}$ können wir durch Integration nach ρ lösen und erhalten als Lösung:

$$\varphi(\rho) = c_1 \ln(\rho) + c_2$$

Durch Umformungen und die Randbedingungen $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = V_0$ erhalten wir:

$$\varphi(\rho) = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$$

Für das Innere ($\rho < a$) muss $c_1 = 0$ gelten, da dort keine Singularität auftreten darf. Somit ist das Potential dort einfach konstant 0.

Außerhalb ($\rho > b$) hängt das Potential von der Ladungsdichte außen auf dem Äußeren Zylinder ab, das interessiert hier allerdings nicht.

Somit ist das Potential:

$$\varphi\left(\rho\right) = \begin{cases} 0 & \rho \in [0, a] \\ \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right) & \rho \in (a, b] \\ \text{undefiniert} & \rho \in (b, \infty) \end{cases}$$

Die Ableitung des Potentials ist das negative $\boldsymbol{E}$-Feld:

$$E_\rho = \frac{V_0}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{\rho}$$

Innerhalb von $[0, a]$ gilt $E_\rho = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir jetzt an, dass für $\rho \in (b, \infty)$ gilt: $E_\rho = 0$. Einen anderen Wert könnten wir mit einer Oberflächenladung außerhalb des außeren Zylinders realisieren.

Der Sprung des $\boldsymbol{D}$-Feldes gilt die Oberflächenladung:

$$\left\langle \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1 \right\rangle = \sigma$$

Da im Inneren gerade $\boldsymbol{D} = 0$ gilt, und das Feld immer senkrecht zu den Oberflächen ist, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$D = \sigma$$

Mit $\boldsymbol{E}\varepsilon\varepsilon_0 = \boldsymbol{D}$ erhalten wir für die Oberflächenladungsdichten:

$$\sigma_a = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) a}, \quad \sigma_b = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) b}$$

Von der Richtung her passt dies gut, weil die Feldlinien so radial nach außen laufen und auf das höhere Potential führen.

Die Linienladungsdichte ist in beiden Fällen gleich, sie ist die Oberflächenladungsdichte multipliziert mit dem Kreisumfang:

$$\lambda_a = -\lambda_b = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{V_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

H 5.3 Greensfunktionen in $d = 2, 1$ Dimensionen

Siehe nächstes Blatt.