Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 3

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 3.1	H 3.2	H 3.3	H 3.4	$\sum$
Punkte	/ 10	/ 10	0 / 20	/ 20	/ 40

H 3.1 eine Konfiguration von Punktladungen

H 3.1.1 Ladungsverteilung und Potential

Das Potential einer Punktladung ist:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Die Ladungsverteilung kann ich mit δ-Distributionen darstellen:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta(x)\delta(y)\left(\delta\left(\frac{a}{2} - z\right) - \delta\left(-\frac{a}{2} - z\right)\right)$$

Die Punktladungen haben jeweils ein Potential, das ich mit Superposition zu einem Gesamtpotential zusammensetzen kann:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\left|\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a/2 \end{pmatrix}\right|} - \frac{Q}{\left|\boldsymbol{r} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a/2 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

H 3.1.2 Ladungen zusammenrücken

Die Dipolmoment $p = Qa$ soll konstant bleiben, dabei soll $a \to 0$ gehen. Ich entwickele das Potential um $a = 0$:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{aQz}{r^3} + \mathcal{O}\left(a^2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pz}{r^3} + \mathcal{O}\left(a^2\right)$$

Wenn man jetzt ein Einheitensystem wählt, in dem $1/\left(4\pi\varepsilon_0\right) = 1$ gilt, dann ergibt dies das geforderte $\Phi = pz/r^3$.

H 3.1.3 andere Ladungsdichte

Gegeben ist die Ladungsdichte:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = -p\delta(x)\delta(y)\delta'(z)$$

Durch Integration erhalte ich das Potential:

$$\begin{aligned}\Phi(\boldsymbol{x}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y' \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z' \frac{\rho\left(x', y', z'\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' \delta\left(x'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y' \delta\left(y'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z' \frac{\delta'\left(z'\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\end{aligned}$$

Durch partielle Integration kann ich die Ableitung nach z von der δ-Distribution auf den inversen Abstand umwälzen.

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' \delta\left(x'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y' \delta\left(y'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z' \delta\left(z'\right) \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x' \delta\left(x'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y' \delta\left(y'\right) \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}z' \frac{\delta\left(z'\right)\left(z-z'\right)}{\left((x-x')^2 + \left(y-y'\right)^2 + (z-z')^2\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

Die Integrale sind jetzt recht einfach durch die δ-Distributionen. Letztlich ist $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$.

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \frac{z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \frac{z}{r^3}\end{aligned}$$

Das ist genau das gleiche Potential wie bei der vorherigen Aufgabe.

H 3.1.4 elektrisches Feld

Für das elektrische Feld bilde ich den Gradienten:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \boldsymbol{\nabla} \frac{z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} p \left(\underbrace{\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{1/r^3 \nabla z} - \underbrace{\frac{3z}{r^4}}_{-z\nabla 1/r^3} \right)$$

Das Feld ist in Abbildung 1 gezeigt. Die Äquipotenzlinien fehlen noch, sollten allerdings Hyperboloide sein.

Abbildung 1: elektrisches Feld

H 3.2 Trennung der Variablen in Polarkoordinaten

H 3.2.1 Lösung der Laplacegleichung

Da das Spiel „finde die Zahl“ inzwischen langweilig ist, schlage ich als neues Spiel „finde den lateinischen Buchstaben“ für diese Aufgabe vor.

Da ϕ und φ eigentlich der gleiche Buchstabe ist, benutze ich für das Potential Φ.

Als Ansatz für das Potential benutze ich $\Phi\left(\rho,\phi\right) = V_0 + \Phi_\rho(\rho)\Phi_\phi(\phi)$. Dies setze ich in die Laplacegleichung, die in Polarkoordinaten gegeben ist, ein:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\rho}\Phi_\phi\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi_\phi}{\partial\phi^2}\Phi_\rho = 0$$

Ich trenne die Variablen:

$$\frac{\rho}{\Phi_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Phi_\phi}\frac{\partial^2\Phi_\phi}{\partial\phi^2} = 0$$

Beide Seiten hängen von unterschiedlichen Variablen ab, somit müssen sie beide gleich einer Konstanten, β^2, sein. Das Quadrat ist willkürlich und wird erst später praktisch. Somit ergeben sich zwei Differentialgleichungen:

$$\rho^2\frac{\partial^2\Phi_\rho}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\rho} - \beta^2\Phi_\rho = 0 \quad \wedge \quad -\beta^2\Phi_\phi = \frac{\partial^2\Phi_\phi}{\partial\phi^2}$$

Die Lösung für die erste Gleichung habe ich nicht selbst finden können, sie stammt aus [**?**, Seite 92]. Die zweite Gleichung lässt sich durch Kosinus und Sinus lösen (und jede Linearkombination davon). Dabei stellt die Funktion $\mathscr{L}[M]$ die lineare Hülle der Menge M dar.

$$\Phi_\rho \in \mathscr{L}\left[\left\{\rho^\beta, \rho^{-\beta}\right\}\right] \quad \wedge \quad \Phi_\phi \in \mathscr{L}\left[\left\{\cos\left(\beta\phi\right), \sin\left(\beta\phi\right)\right\}\right]$$

Die Randbedingungen erfordern, dass $\Phi\left(\rho,0\right) = 0$ und $\Phi\left(\rho,\alpha\right) = 0$ sind. Daraus folgt, dass keine Kosinusterme in Φ_ϕ vorkommen. Außerdem muss $\sin\left(\beta\phi\right) = 0$ gelten, woraus folgt: $\beta = n\pi/\alpha$. Da Φ bei $\rho = 0$ keine Singularität haben soll, folgt auch noch, dass keine negativen Potenzen von ρ vorkommen können. Die γ_n sind die Koeffizienten für die Linearkombination. Die allgemeine Lösung dann so aus:

$$\Phi\left(\rho,\phi\right) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\rho^{n\pi/\alpha}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\phi\right)$$

H 3.2.2 Näherung und elektrisches Feld *E*

Für kleines ρ ist nur der erste Term in der Potenzreihe maßgebend. Somit ist das Potential näherungsweise:

$$\Phi\left(\rho,\phi\right) \approx V_0 + \gamma_1\rho^{\pi/\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{\beta}\phi\right)$$

Das elektrische Feld ist die negative Ableitung des Potentials. Diese sind mit den entsprechenden Formeln für Polarkoordinaten:

$$E_\rho = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = -\gamma_1\frac{\pi}{\beta}\rho^{\pi/\beta-1}\sin\frac{\pi}{\beta}\phi, \quad E_\phi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} = -\gamma_1\frac{\pi}{\beta}\rho^{\pi/\beta-1}\cos\frac{\pi}{\beta}\phi$$

Somit ist das Feld in Polarkoordinaten:

$$\boldsymbol{E}(\rho,\phi)=\boldsymbol{e}_\rho E_\rho+\boldsymbol{e}_\phi E_\phi$$

Die Oberflächenladungsdichte ist gegeben durch $\sigma=\varepsilon_0 E$. Diese ist aufgrund der Azimutalsymmetrie auf beiden Platten gleich, ich gebe die Ladungsdichte für $\phi=0$ an. Der Vektor $\boldsymbol{\nu}$ ist der Normalenvektor auf die Platte.

$$\sigma(\rho)=\varepsilon_0\left\langle\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{E}(\rho,0)\right\rangle=\varepsilon_0\left\langle\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_\rho E_\rho(\rho,0)+\boldsymbol{e}_\phi E_\phi(\rho,0)\right\rangle=-\varepsilon_0\gamma_1\frac{\pi}{\beta}\rho^{\pi/\beta-1}$$

H 3.3 Kugelflächenfunktionen

Diese Aufgaben lasse ich aus.

H 3.4 Spiegelladungen 2

Aus Symmetriegründen muss die Spiegelladung auf der Verbindungslinie vom Koordinatenursprung und Ladung liegen. Die Ladung sei q' groß und an der Position $\boldsymbol{r}_{q'}$.

Ich habe mich bei der Bearbeitung an [**?**, Seite 70] gehalten.

H 3.4.1 Potential

Das Potential Φ ist eine Superposition von Punktladung und Spiegelladung:

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q\right|}+\frac{q'}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_{q'}\right|}\right)$$

Da die beiden Ladungen auf einer Linie liege, kann ich die Position als Vielfaches eines Normalenvektors $\boldsymbol{\nu}$ schreiben:

$$\Phi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\left|\boldsymbol{\nu}r-\boldsymbol{\nu}r_q\right|}+\frac{q'}{\left|\boldsymbol{\nu}r-\boldsymbol{\nu}r_{q'}\right|}\right)$$

An der Stelle $r=R$ soll das Potential 0 sein. Somit muss gelten:

$$\Phi(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\left|\boldsymbol{\nu}R-\boldsymbol{\nu}r_q\right|}+\frac{q'}{\left|\boldsymbol{\nu}R-\boldsymbol{\nu}r_{q'}\right|}\right)\stackrel{!}{=}0$$

Jetzt klammere ich im Nenner aus:

$$\Phi(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R\left|\boldsymbol{\nu}-\boldsymbol{\nu}\frac{r_q}{R}\right|}+\frac{q'}{r_{q'}\left|\boldsymbol{\nu}\frac{R}{r_{q'}}-\boldsymbol{\nu}\right|}\right)\stackrel{!}{=}0$$

Der Ausdruck ist genau dann gleich 0, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{q}{R} = -\frac{q'}{r_{q'}} \quad \wedge \quad \frac{r_1}{R} = \frac{R}{r_{1'}}$$

Dies kann ich umformen zu:

$$q' = -\frac{R}{r_q} q \quad \wedge \quad r_{q'} = \frac{R^2}{r_q}$$

Das setze ich in das Potential ein und erhalte:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_q\right|} - \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}\,\frac{r_q}{R} - R\boldsymbol{r}_q\right|} \right)$$

H 3.4.2 Flächenladungsdichte

Die Flächenladungsdichte ist, mit γ als Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}_q$:

$$\sigma = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{r}}\bigg|_{r=R} = -\frac{q}{4\pi R^2} \frac{R}{r_q} \frac{1 - \frac{R^2}{r_q{}^2}}{\left(1 + \frac{R^2}{r_q{}^2} - R\frac{R}{r_q}\cos(\gamma)\right)^{3/2}}$$

Die Ladung auf der Oberfläche muss gleich der Spiegelladung und das Negative der realen Ladung sein, da der gesamte Raum ohne das Innere der Kugel durch den Leiter begrenzt wird, der feldfrei sein muss. Somit muss außerhalb der Kugel total keine Ladung sein.

H 3.4.3 Kraft

Die Kraft auf die Ladung könnte durch Integration über die Ladungsverteilung ermittelt werden. Ich wähle hier den einfacheren Weg, in dem ich die Kraft auf die Spiegelladung berechne. Diese ist:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{d^3} \boldsymbol{d}$$

Dann setze ich noch die in den vorherigen Aufgaben gefundene Relationen für die Position und Ladung der Spiegelladung ein. Damit erhalte ich:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r_q{}^2} \left(\frac{a}{r_q}\right)^3 \left(1 - \frac{a^2}{r_q{}^2}\right)^{-2} \hat{\boldsymbol{r}}_q$$

H 3.4.4 isolierte, leitende Hohlkugel

Laut [**?**, Seite 75] kann ich die Ladung Q auf der Kugeloberfläche als lineare Superposition von einer Ladung q', die die äußere Ladung q ausgleicht und einer Restladung Q—q' ansehen. Dabei verteilt sich die Restladung homogen, weil die Ladung q' bereits das externe Feld der Ladung q ausgleicht.

Somit kommen als zu den Potentialen und Kräften der vorherigen Aufgabenteilen folgende Teile hinzu. Dabei kann ich die Restladung im Koordinatenursprung zentriert annehmen.

$$\Phi_{Q+q'}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q + \frac{R}{r_q} q}{x}$$

Die Kraft bekommt ebenfalls einen weiteren Term:

$$\boldsymbol{F}_{Q+q'}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(Q + \frac{R}{r_q} q\right) q}{x^3} \boldsymbol{x}$$

Ein Ladungsüberschuss auf der Außenseite wird diese nicht verlassen und auf die Innenseite wandern. Da innerhalb des Leiters kein Feld herrschen kann, muss nach dem Gesetz von Gauß das Innere ladungsfrei sein. Daher kann die Ladung nicht nach innen wandern. Von der Kugel könnte die Ladung bei ausreichend hohen elektrischen Feldern und realen Leitern allerdings in einem Blitz entkommen.