

Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik321 – Übung 2

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 2.1	H 2.2	H 2.3	H 2.4	H 2.5	Σ
Punkte	/ 10	/ 10	/ 10	/ 10	/ 10	/ 40

H 2.1 zylindrische und sphärische Koordinaten

H 2.1a orthonormales System

Kugelkoordinaten Die Transformationen von zylindrische in kartesische Koordinaten ist gegeben durch:

$$\varphi(r, \phi, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Die dazugehörige Jakobimatrix ist:

$$J_k := D\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Die Einheitsvektoren sind die Spalten der Jakobimatrix, allerdings normiert. Diese sind:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Diese sollen jetzt orthogonal sein. Dies bedeutet, dass gilt:

$$\lambda_1 \mathbf{e}_r + \lambda_2 \mathbf{e}_\phi + \lambda_3 \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{1, 2, 3\} : \lambda_i = 0$$

Ich sehe, dass $\langle \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi \rangle = 0$, $\langle \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta \rangle = 0$, und $\langle \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_r \rangle = 0$. Somit sind sie paarweise orthogonal. Da es drei Stück gibt, bilden sie eine orthonormale Basis.

Zylinderkoordinaten Die Transformation ist:

$$\varphi(\rho, \phi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos(\phi) \\ \rho \sin(\phi) \\ z \end{pmatrix}$$

Die Jakobimatrix ist:

$$J_z := D\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\rho \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \rho \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die (normierten) Einheitsvektoren sind dann:

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Auch hier kann ich schnell sehen, dass die Vektoren paarweise orthogonal sind. Somit bilden sie auch eine orthonormale Basis.

H 2.1b Ableitungsoperatoren

Die Vorgehensweise habe ich in [?] gefunden.

H 2.1b.1 Zylinderkoordinaten

Für den Nabla in Zylinderkoordinaten projiziere ich diesen auf die Einheitsvektoren, die allerdings nicht normiert worden sind. Von der anderen Seite kann ich über die Kettenregel die Koordinatentransformation durchführen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} = \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial y} = \langle \hat{\mathbf{e}}_\rho, \nabla \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} = -\rho \sin(\phi) \frac{\partial}{\partial x} + \rho \cos(\phi) \frac{\partial}{\partial y} = \rho \langle \hat{\mathbf{e}}_\phi, \nabla \rangle \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} = \langle \hat{\mathbf{z}}_\phi, \nabla \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\nabla_z := \hat{\mathbf{e}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Divergenz Nun wende ich den gerade hergeleiteten ∇_z -Operator auf ein Vektorfeld \mathbf{A} an, das in Zylinderkoordinaten gegeben ist:

$$\mathbf{A} := \hat{\mathbf{e}}_\rho A_\rho + \hat{\mathbf{e}}_\phi A_\phi + \hat{\mathbf{e}}_z A_z$$

Anders als in den kartesischen Koordinaten sind die Ableitungen der Basisvektoren nicht immer 0:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\rho}{\partial \phi} = \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_\rho$$

Bei der Divergenz ist zu beachten, dass nicht nur das Vektorfeld, sondern auch die Einheitsvektoren abgeleitet werden müssen. Das Skalarprodukt $\langle \nabla_z, \mathbf{A} \rangle$ wird dann zu einem normalen Produkt. Im kartesischen Fall würden dann einfach alle Einheitsvektoren, die nicht gleich sind, als Skalarprodukt 0 haben und entfallen. Mit den beiden Identitäten oben, kommt allerdings noch ein weiterer Term hinzu:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_z, \mathbf{A} \rangle &= \hat{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{e}_\rho A_\rho + \hat{e}_\phi A_\phi + \hat{e}_z A_z) \\ &\quad + \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{e}_\rho A_\rho + \hat{e}_\phi A_\phi + \hat{e}_z A_z) \\ &\quad + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (\hat{e}_\rho A_\rho + \hat{e}_\phi A_\phi + \hat{e}_z A_z) \end{aligned}$$

Die meisten Skalarprodukte entfallen direkt. Bei den $\frac{\partial}{\partial \phi}$ Termen wandeln sich einige Einheitsvektoren um, so dass deren Skalarprodukt mit \hat{e}_ϕ nicht mehr 0 sind.

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \hat{e}_\phi \frac{1}{\rho} \left(\hat{e}_\phi A_\rho - \hat{e}_\rho A_\phi + \hat{e}_\phi \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Rotation Die Rotation funktioniert ähnlich wie die Divergenz.

$$\begin{aligned} \nabla_z \times \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & A_\phi & A_z \\ \hat{e}_\rho & \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} (A_\phi \hat{e}_z - A_z \hat{e}_\phi) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_z \hat{e}_\rho - A_\rho \hat{e}_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_\rho \hat{e}_\phi - A_\phi \hat{e}_\rho) \end{aligned}$$

Auch hier kommen durch die Produktregel einige weitere Terme hinzu.

$$\begin{aligned} &= \hat{e}_z \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} - \hat{e}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \left(\hat{e}_\rho \frac{\partial A_z}{\partial \phi} + \hat{e}_\phi A_z - \hat{e}_z \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) + \hat{e}_\phi \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \hat{e}_\rho \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ &= \hat{e}_\rho \left(-\frac{\partial A_\phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} \right) + \hat{e}_\phi \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} A_z \right) + \hat{e}_z \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \rho} \right) \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist nicht ganz das Richtige, allerdings kann ich den Fehler nicht finden.

Laplace In die Gleichung mit der Divergenz kann ich den Gradienten einsetzen. Ich erhalte dann:

$$\Delta_z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

H 2.1b.2 Kugelkoordinaten

Die gleiche Idee wie bei den Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} = \cos(\phi) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\phi) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial z} = \langle \hat{e}_r, \nabla \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \phi} &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial z} = -r \sin(\phi) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + r \cos(\phi) \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \langle \hat{e}_\phi, \nabla \rangle \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial z} = r \cos(\phi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + r \sin(\phi) \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial y} - r \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \langle \hat{e}_\theta, \nabla \rangle \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\nabla_k := \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Wie bei den Zylinderkoordinaten wird hier eingesetzt und die Basisvektoren mit differenziert. Diese Rechnung lasse ich aus.

H 2.2 zum Integralsatz von Stokes

Gegeben ist ein Vektorfeld:

$$K(r) = r$$

H 2.2a Linienintegrale

gerade Pfade Es soll ein Linienintegral berechnet werden, der Pfad ist in Abbildung 1 dargestellt.

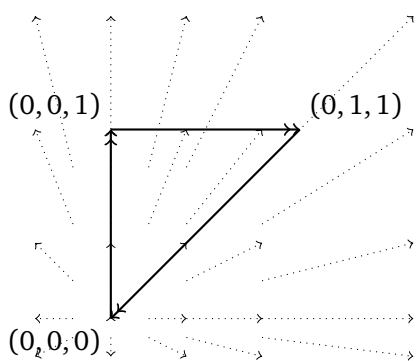


Abbildung 1: Vektorfeld K und Pfad γ_1

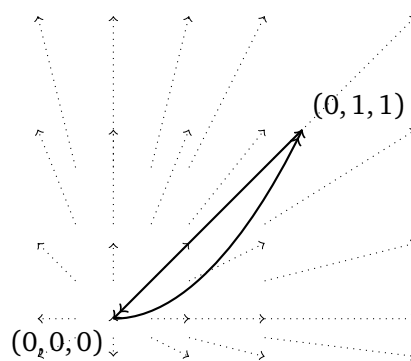


Abbildung 2: Vektorfeld K und Pfad γ_2

Ich beginne mit den normierten Tangentialvektoren:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Karten für die eindimensionale Untermannigfaltigkeit, die die Linie ja ist, sind:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \quad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

Die Definitionsbereiche der Karten sind $(0, 1)$, $(0, 1)$ und $(0, \sqrt{2})$. Die Randpunkte, die eigentlich zum Pfad noch dazu gehören sind eine Nullmenge und machen bei der Integration keinen Unterschied. Die Gramschen Determinanten der Karten sind allesamt 1.

Nun kann ich die Linienintegrale ausrechnen:

$$W = \sum_{i=1}^3 \int dt \langle \tau_i, K(\varphi_i(t)) \rangle$$

Ich setze alles ein.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dt \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\rangle + \int_0^1 dt \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right\rangle \\ &+ \int_0^{\sqrt{2}} dt \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right\rangle \end{aligned}$$

Die Skalarprodukte löse ich auf.

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dt t + \int_0^1 dt t + \int_0^{\sqrt{2}} dt \sqrt{2} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Parabel Nun der zweite Pfad γ_2 , diesmal mit Parabelbogen (Abbildung 2).

Für den Parabelteil ist meine Karte φ , deren Gramsche Determinante g und der Tangentialvektor:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad g = 1 + 4t^2, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Das Linienintegral ist nun, zusammen mit dem zweiten Pfadteil, dessen Ergebnis -1 ich aus der vorherigen Aufgabe übernehme:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^1 dt \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle \sqrt{1+4t^2} - 1 \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t^4 \right]_0^1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass die beiden geschlossenen Integrale gerade 0 sind. Somit scheint dieses Kraftfeld, zumindest hier lokal, konservativ zu sein.

H 2.2b mit dem Satz von Stokes

Die geschlossenen Linienintegrale können auch über die Rotation des Vektorfeldes bestimmt werden. Das Vektorfeld muss allerdings differenzierbar sein und das Gebiet kompakt.

Da $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ gilt, sind hier alle geschlossenen Pfadintegrale gleich 0.

H 2.3 Multipolentwicklung

Die Verteilungen der Ladungen im Raum habe ich in Abbildung 3 skizziert. Berechnet werden soll das Dipolmoment \mathbf{p} und der Quadrupoltensor \mathbf{Q} bestimmt werden.

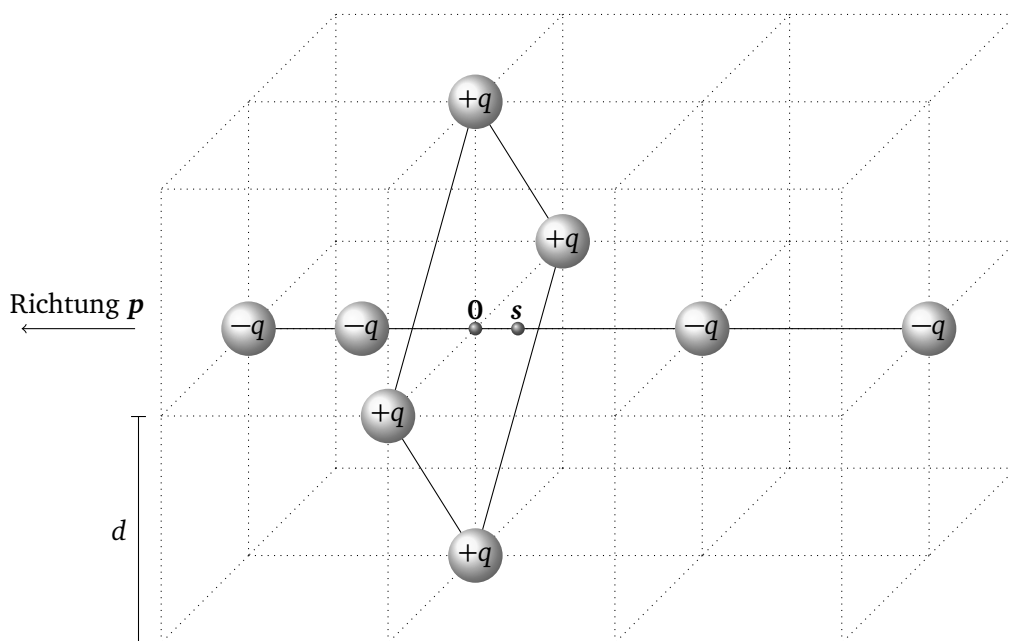


Abbildung 3: Anordnung der Ladungen. $\mathbf{0}$ ist der Koordinatenursprung, \mathbf{s} der Schwerpunkt der Ladungen.

H 2.3a Dipolmoment

Das Dipolmoment \mathbf{p} eines Dipols mit Ladung $+q$ und $-q$ und Separation \mathbf{d} ist:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

Ich bestimme den Schwerpunkt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \mathbf{r}_i \\ &= \frac{1}{8} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{16}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei mehreren Ladungen $((q_i, \mathbf{r}_i))_{i \in \{1, \dots, 8\}}$ setzt sich das Dipolmoment aus den einzelnen Momenten zusammen. Dabei ist \mathbf{r}_i die Position und \mathbf{s} der Schwerpunkt der Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^8 q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{s}) \\ &= q \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d - \frac{3}{16}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d - \frac{3}{16}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d - \frac{3}{16}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2d - \frac{3}{16}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= q \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H 2.3b Quadrupoltensor

Das Quadrupolmoment ist gegeben durch:

$$Q_{ij} = \int d^3 \mathbf{x}' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}')$$

In diesem Fall hier habe ich keine kontinuierliche Ladungsverteilung, sondern diskrete Ladungen. Dies kann ich mit der δ -Funktion modellieren:

$$= \int d^3 \mathbf{x}' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \sum_{k=1}^8 q_k \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{x}')$$

Integral und Summe kann ich vertauschen. Das Integral über die δ -Funktion liefert die gewünschten diskreten Ladungen.

$$= \sum_{k=1}^8 \int d^3 \mathbf{x}' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) q_k \delta(\mathbf{r}_k - \mathbf{x}')$$

Da die δ -Distribution nur auf den 8 Stellen von 0 verschieden ist, kann ich das Integral ausführen. Mit $r_{ki} = \langle \mathbf{r}_k, \mathbf{e}_i \rangle$:

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^8 q_k (3r_{ki} r_{kj} - (r_k)^2 \delta_{ij})$$

Mit dem Tensorprodukt \otimes kann ich das auch als ganzen Tensor schreiben. Dabei bezeichnet $\mathbf{1}$ den Einheitsensor oder -matrix.

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^8 q_k (3\mathbf{r}_k \otimes \mathbf{r}_k - \mathbf{1} r_k^2)$$

Nun kann ich alle Zahlen einsetzen und erhalte:

$$\mathbf{Q} = \frac{d^2 q}{4} \begin{pmatrix} -246 & 27 & 27 \\ 27 & 123 & 27 \\ 27 & 27 & 123 \end{pmatrix}$$

Der Tensor ist symmetrisch und spurlos.

H 2.4 Magnetisches Feld eines ausgedehnten Leiters

Es gilt $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Dies kann ich auch in Integralen schreiben, für dieses Problem benutze ich Zylinderkoordinaten. Ich betrachte eine Kreisfläche A mit Radius r , die den Leiter in einem Kreis schneidet. Das Normalenvektorfeld auf A ist \mathbf{v} , der Tangentialvektor an den Kreisrand ist $\boldsymbol{\tau}$. Die Stromdichte \mathbf{j} ist $\frac{I}{\pi R^2}$. Somit gilt nach dem Satz von Stokes:

$$\oint_{\partial A} dl \langle \mathbf{H}, \boldsymbol{\tau} \rangle = \int_A dA \langle \mathbf{j}, \mathbf{v} \rangle$$

Die Integrale sind für den Fall $r > R$ durch Wahl des Koordinatensystems trivial. Somit folgt für das magnetische Feld:

$$2\pi r H = I \quad \Leftrightarrow \quad H(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Falls $r < R$ gilt, ist der umschlossene Strom kleiner. Dann gilt nur noch:

$$2\pi r H = \frac{r^2}{R^2} I \quad \Leftrightarrow \quad H(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{r}{R^2} I$$

Das Feld ist ein Wirbelfeld, dessen Richtung mit der rechten Handregel bestimmt werden kann.

H 2.5 geladene Walze, Rohr und Platte

Bei all diesen Aufgaben benutze ich das Gesetz von Gauß.

H 2.5a Hohlzylinder

Die Oberflächenladungsdichte auf der Außenseite sei σ . Als Integrationsvolumen benutze ich einen Zylinder mit Radius r , der konzentrisch mit dem Hohlzylinder liegt. Dann gilt:

$$\oint_{\partial V} dA \langle \mathbf{D}, \mathbf{v} \rangle = \int_V dV \rho$$

Die Integrale sind hier recht trivial:

$$2\pi r h D = 2\pi R h \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \sigma \frac{R}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

Innerhalb des Zylinders befindet sich keine Ladung, so dass es dort auch kein Feld bilden kann.

Das Potential ist das negative Feld nach dem Radius integriert. Dabei ist es innerhalb des Zylinders konstant, weil keine Kraft wirkt.

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon_0} R \sigma \ln(r) & r \geq R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

Verschiebungsdichte und Potential sind in Abbildung 4 beziehungsweise 5 gezeigt.

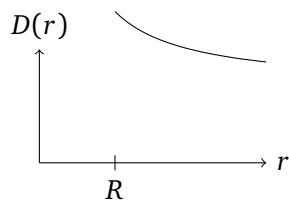


Abbildung 4: Verschiebungsdichte des Hohlzylinders

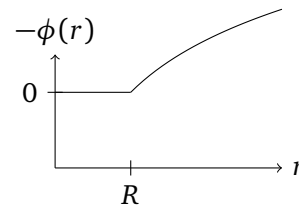


Abbildung 5: Potential des Hohlzylinders

H 2.5b Vollzylinder

Der Vollzylinder funktioniert analog für den Fall $r > R$. Nur wird die Fläche und Oberflächenladungsdichte durch Volumen und Ladungsdichte ersetzt.

$$2\pi r h D = \pi R^2 h \rho \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \rho \frac{R^2}{r} \hat{\mathbf{r}}$$

Innerhalb des Vollzylinders gibt es nun ein Feld. Dieses ist:

$$2\pi r h D = \pi r^2 h \rho \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \rho r \hat{\mathbf{r}}$$

Das Potential ist wieder das negative Feld nach dem Radius integriert. Es ergibt sich:

$$\phi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \rho R^2 \ln(r) & r \geq R \\ -\frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon_0} \rho r^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{\epsilon_0} \rho R^2 + \phi(R) & r < R \end{cases}$$

Verschiebungsdichte und Potential sind in Abbildung 6 beziehungsweise 7 gezeigt.

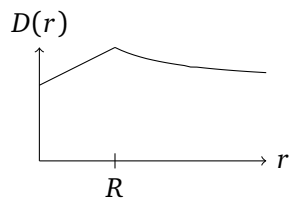


Abbildung 6: Verschiebungsdichte des Vollzylinders

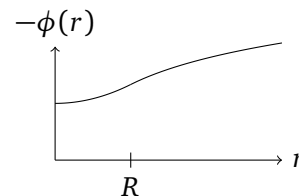


Abbildung 7: Potential des Vollzylinders

H 2.5c Platte

Bei einer Platte wähle ich ein beliebiges Prisma, dessen Stirnflächen (Flächeninhalt A) parallel zur Platte sind und das von der Platte geschnitten wird. Aus der Symmetrie folgt dann, dass kein Fluss durch die Seitenflächen geht. Nach dem Gesetz von Gauß gilt dann:

$$2AD = A\sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \sigma \hat{\mathbf{r}}$$

Das Potential ist das negative Feld nach dem Abstand integriert:

$$\phi(r) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma |r|$$

Verschiebungsdichte und Potential sind in Abbildung 8 beziehungsweise 9 gezeigt.

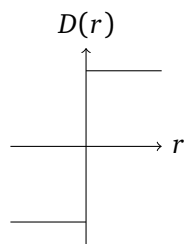


Abbildung 8: Verschiebungsdichte der Platte

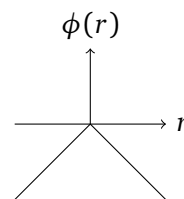


Abbildung 9: Potential der Platte