Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik321.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik321/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik321 – Übung 1

Gruppe 8 – Julia Volmer

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

2014-07-07

Aufgabe	H 1.1	H 1.2	H 1.3	Σ
Punkte				

H 1.1 Gradient, Divergenz und Rotation

H 1.1a Gradienten

$$\boldsymbol{\nabla} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = e^i \partial_i a_j x^j = \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}$$

H 1.1b Divergenz

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{x} \rangle = \partial_i x^i = 3$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, r\boldsymbol{a} \rangle = \partial_i (ra)^i = \left(\partial_i r\right) a^i + r \partial_i a^i = \frac{x_i}{r} a^i = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} \rangle}{r}$$

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \frac{\boldsymbol{x}}{r} \right\rangle = \frac{3}{r} + 1$$

H 1.1c Rotation

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{x} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \begin{pmatrix} yz + 12xy \\ xz - 8yz^2 + 6x^2 \\ xy - 12y^2z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24yz^2 + 16yz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{a} \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{c} \rangle - \boldsymbol{x} \langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{a} \rangle \right)$$

H 1.2 Identitäten der Vektoranalysis

H 1.2a rot grad

Es ist zu zeigen, dass Gradienten wirbelfrei sind:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = 0$$

Dazu schreibe ich das alles in Komponenten:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla}\phi\right) = \epsilon^{ab}{}_{c}\partial_a\partial_b\phi e^c$$

Da der $\boldsymbol{\epsilon}$-Tensor total antisymmetrisch, die Ableitungen allerdings symmetrisch sind (Satz von Schwarz), ist die Summe gerade 0.

$$= 0$$

H 1.2b div rot

Es ist zu zeigen, dass Wirbelfelder quellenfrei sind:

$$\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\rangle = 0$$

Auch hier benutze ich wieder Komponenten:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}\rangle &= \partial_a \epsilon^{ab}{}_{c}\partial_b A^c \\ &= \epsilon^{ab}{}_{c}\partial_a\partial_b A^c \\ &= 0\end{aligned}$$

H 1.2c div Produktregel

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \phi\boldsymbol{A}\right\rangle = \phi\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}\rangle + \left\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\nabla}\phi\right\rangle$$

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}, \phi\boldsymbol{A}\right\rangle = \partial_a\left(\phi A\right)^a$$

Hier wende ich die normale Produktregel an.

$$\begin{aligned}&= \left(\partial_a\phi\right)A^a + \phi\,\partial_a A^a \\ &= \left\langle \boldsymbol{\nabla}\phi, \boldsymbol{A}\right\rangle + \phi\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}\rangle\end{aligned}$$

H 1.2d rot rot

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}\rangle - \triangle\boldsymbol{A}$$

Dies geht mit der $\boldsymbol{B}\,\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}\rangle - \boldsymbol{C}\,\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$-Regel:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{\nabla}\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}\rangle - \boldsymbol{A}\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{\nabla}\rangle \\ &= \boldsymbol{\nabla}\,\langle \boldsymbol{\nabla}, \boldsymbol{A}\rangle - \triangle\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

Dabei ist $\triangle\boldsymbol{A}$ der Vektor, auf dessen Komponenten jeweils der $\triangle$-Operator angewandt wurde.

H 1.3 elektrische Feldstärken

Ich rechne hier mit dem $\boldsymbol{D}$-Feld, der Übergang zum $\boldsymbol{E}$-Feld geht hier mit $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$.

H 1.3a Gerade

Ich wähle einen Zylinder mit Radius r und Höhe h, der so ausgerichtet ist, dass die Gerade seine Symmetrieachse ist. Die Ladungsdichte auf der Geraden sei λ. Dann gilt nach dem gaußschen Satz:

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle = \int_V \mathrm{d}V \, \rho$$

Durch die „Deckel“ des Zylinders geht aufgrund der Symmetrie kein Fluss. Außerdem steht das Feld immer senkrecht auf der Mantelfläche, so dass das erste Integral einfach ein Produkt wird. Das zweite Integral ist ebenfalls trivial, da einfach nur die Höhe des Zylinders gebraucht wird.

$$\begin{aligned} 2\pi D h r &= \lambda h \\ \boldsymbol{D} &= \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

H 1.3b Zylinder

Ich beginne mit dem Feld außerhalb des Zylinders. Dort gilt wie vorher auch das gleiche gaußsche Satz sowie die gleichen Symmetrien.

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle &= \int_V \mathrm{d}V \, \rho \\ 2\pi D h r &= \pi \rho h R^2 \\ \boldsymbol{D} &= \frac{1}{2} \rho \frac{R^2}{r} \hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

Ist $r < R$, so wird über weniger Volumen integriert. So gilt:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle &= \int_V \mathrm{d}V \, \rho \\ 2\pi D h r &= \pi \rho h r^2 \\ \boldsymbol{D} &= \frac{1}{2} \rho r \hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

H 1.3c Platte

Als Volumen wähle ich ein beliebiges Prisma, dessen Stirnflächen parallel zur Platte sind. Wegen der Symmetrie geht kein Fluss durch die Seiten der Prismas, nur durch die Stirnflächen, deren Fläche A sei. Dann gilt nach dem gaußschen Satz:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle &= \int_V \mathrm{d}V \, \rho \\ 2DA &= \sigma A \\ \boldsymbol{D} &= \frac{\sigma}{2} \hat{\boldsymbol{r}} \end{aligned}$$

H 1.3d Kugel

Als Volumen wähle ich nun eine Kugel mit Radius r.

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle &= \int_V \mathrm{d}V \, \rho \\ 4\pi D r^2 &= \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \\ \boldsymbol{D} &= \frac{1}{3}\rho\frac{R^3}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$

Falls $r < R$ gilt, wird über weniger Ladung integriert. Somit gilt dann:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V} \mathrm{d}A \, \langle \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\nu} \rangle &= \int_V \mathrm{d}V \, \rho \\ 4\pi D r^2 &= \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \\ \boldsymbol{D} &= \frac{1}{3}\rho r\hat{\boldsymbol{r}}\end{aligned}$$