Oberflächenstromdichte einer homogen magnetisierten Kugel

Korrektur zur Aufgabe H 5.1, Teil 3, zu „Theoretischer Physik 2“ aus dem Wintersemester 2012/2013

Martin Ueding

mu@martin-ueding.de

2015-12-03

Ich wurde darauf aufmerksam gemacht, dass die Aufgabe H 5.1, Teil 3, auf dem fünften Aufgabenzettel aus der „Theoretischen Physik 2 – Elektrodynamik“ ein nicht deutlich korrigierter Fehler enthält. Die Stromdichte und vor allem die Winkelverteilung $\alpha(\theta)$ ist nicht korrekt. Die Tutorin hat den Rechenfehler markiert und geschrieben, dass man das daraus nicht folgern kann. Daraus folgt dann auch, dass meine errechnete Stromdichte nicht korrekt ist. Da diese allerdings nicht noch explizit als falsch markiert ist, kann der Eindruck entstehen, dass die Lösung aber richtig ist, nur die Rechnung unsauber ist. Das soll hiermit richtig gestellt werden.

Die damals gestellte Aufgabe ist exakt die Aufgabe 3.4.2 aus dem Buch von Nolting [1]. Im Anhang des Buches ist diese Aufgabe vorgerechnet.

Gegeben ist also die mikroskopische Magnetisierung der Kugel $\boldsymbol{M} = M_0 \boldsymbol{e}_z$. Außerdem ist als Ansatz für die Stromdichte $\boldsymbol{j} = a(\theta)\,\delta(r-R)\,\boldsymbol{e}_\phi$ gegeben. Das magnetische Moment dieser Stromdichte ist letztlich Ladung mal Drehimpuls, also

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\,.$$

Hier können wir alles einsetzen, was wir bisher wissen. Wir beginnen mit dem Ansatz für $\boldsymbol{j}$ und erhalten

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, \boldsymbol{r} \times \left[a(\theta)\,\delta(r-R) \boldsymbol{e}_\phi \right].$$

Die skalaren Größen können vor das Kreuzprodukt gezogen werden. Daher haben wir

$$= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, a(\theta)\,\delta(r-R)\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{e}_\phi\,.$$

Kugelkoordinaten sind ein Orthonormalsystem mit $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$. Das Kreuzprodukt ist somit zyklisch und aus $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\phi$ erhalten wir $-\boldsymbol{e}_\theta$. Mit $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ ergibt sich dann

$$= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \, r a(\theta) \, \delta(r - R) \, \boldsymbol{e}_\theta \, .$$

Ab hier sollte man das Integral in Kugelkoordinaten ausschreiben. Dies ist mit impliziten Grenzen

$$= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}r \, r^3 \delta(r - R) \int \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \, a(\theta) \, \boldsymbol{e}_\theta \, .$$

Das Integral über den Radius ist unabhängig von den anderen Integrationen, es liefert nur R^3. Somit vereinfacht sich das ganze zu

$$= -\frac{1}{2} R^3 \int \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \, a(\theta) \, \boldsymbol{e}_\theta \, .$$

Für die Integration über die Winkel setzen wir $\boldsymbol{e}_\theta$ ein. Dies erhalten wir zum Beispiel durch $\partial \boldsymbol{r} / \partial \theta$ an der Stelle $r = 0$, so dass der Vektor auf 1 normiert ist. Mit dem Vektor haben wir

$$= -\frac{1}{2} R^3 \int \mathrm{d}\phi \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta) \, a(\theta) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} .$$

Die Integrale über ϕ sind für die x- und y-Komponente derart, dass gerade 0 herauskommt. Integriert man Sinus oder Kosinus im Intervall $[0, 2\pi]$ ist dies gerade null. Daher verschwinden diese Komponenten. Die z-Komponente hängt nicht von ϕ ab, daher gibt das Integral einen Faktor 2π. Wir können den ganzen Ausdruck also wieder kompakter schreiben als

$$= \pi R^3 \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta)^2 \, a(\theta) \, \boldsymbol{e}_z \, .$$

Auf der anderen Seite haben wir die homogene Magnetisierung aus dem Innenraum. Diese mikroskopische Magnetisierung müssen wir integrieren um auf die makroskopische Magnetisierung der Kugel zu kommen. Das Integral über die konstante Magnetisierung $\boldsymbol{M} = M_0 \boldsymbol{e}_z$ gibt das Kugelvolumen, also $3\pi R^3/4$. Wir möchten $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}$, also

$$\frac{3}{4} \pi R^3 M_0 \boldsymbol{e}_z = \pi R^3 \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta)^2 \, a(\theta) \, \boldsymbol{e}_z \, .$$

Nach Kürzen der Konstanten bleibt

$$\frac{3}{4} M_0 = \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta)^2 \, a(\theta) \, .$$

Man könnte das jetzt als

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \left[\sin(\theta)^2 \, a(\theta) - \frac{1}{\pi} \frac{3}{4} M_0 \right] = 0$$

schreiben. Eine Lösung für *diese* Gleichung wäre tatsächlich

$$a(\theta) = \frac{3}{4\pi} M_0 \sin(\theta)^{-2} = \frac{3}{4\pi} M_0 \csc(\theta)^2 \, .$$

Das ist das, was ich vor drei Jahren geschrieben habe. Ich habe das damals allerdings anders aufgeschrieben und somit verpasst, dass das nur eine Implikation in die Rückrichtung ist. Wir haben hier

$$\frac{3}{4} M_0 = \int \mathrm{d}\theta \, \sin(\theta)^2 \, a(\theta) \impliedby a(\theta) = \frac{3}{4\pi} M_0 \csc(\theta)^2 \, .$$

So aufgeschrieben ist offensichtlich, dass $a(\theta)$ eine für diese Gleichung legitime Lösung ist, aber nicht die eindeutige Lösung. Das gegebene Randwertproblem ist jedoch hinreichend genau spezifiziert um eine eindeutige Lösung zu haben. Um diese zu finden muss man weitere physikalische Zusammenhänge herbeiziehen. Außerdem ist die Lösung bei $\theta = 0$ divergent, ein Problem, das die korrekte Lösung nicht hat [1, S. 491].

Im vorhergehenden Aufgabenteil habe ich schon das Magnetfeld H innerhalb und außerhalb der Kugel ausgerechnet. Dies muss konsistent mit der errechneten Stromdichte sein. Somit gibt dies weitere Bedingungen, die die Funktion $a(\theta)$ zu erfüllen hat. Die obige Gleichung sagt eigentlich nur aus, dass die Richtung entlang $\boldsymbol{e}_\phi$ korrekt ist und gibt eine Normierung für $a(\theta)$ vor, also die Stärke des Stroms. Die genaue Verteilung müssen wir mit Randbedingungen des Magnetfeldes erhalten.

Die Maxwellgleichungen in Vektorschreibweise für die Magnetostatik sind

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \, , \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \, .$$

Zusammen mit den Integralsätzen von Gauß und Stokes[1] kann man weitere Bedingungen für die Stromdichte herleiten. Gegeben ist, dass die Stromdichte außerhalb der Oberfläche

[1] Die Sätze sind beides Spezialfälle des einen Satz von Stokes für Differentialformen,

$$\int_\sigma \mathrm{d}\phi = \int_{\partial\sigma} \phi \, ,$$

wobei σ ein Gebiet mit Orientierung ist, ϕ ist eine p-Form. Hier ist diese Form nicht sonderlich nützlich, da mit Vektoren gerechnet wird oder werden soll.

verschwindet. Das heißt, dass es maximal einen Oberflächenstrom geben darf. Somit kann man den Satz von Gauß mit einem Volumen benutzen, das ein Stück der Kugeloberfläche umschließt. Aus der ersten Gleichung können wir folgern, dass die Normalkomponente von $\boldsymbol{B}$ keine Unstetigkeit beim Durchdringen der Oberfläche hat.

Für den Satz von Stokes können wir eine kleine Schleife in einer $\phi = \text{const}$-Ebene benutzen. In einer solchen Ebene ist $\boldsymbol{e}_\phi$ der Normalenvektor. Zuerst muss dafür allerdings das Magnetfeld in Kugelkoordinaten ausgedrückt werden. Außerhalb hatte ich als Ausdruck für das Magnetfeld

$$\boldsymbol{H} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} - 3\frac{[\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}]\boldsymbol{r}}{r^5}\right].$$

Drückt man nun $\boldsymbol{m}$ und $\boldsymbol{r}$ in Polarkoordinaten aus und nutzt dass $\cos(\theta) = z/r$ ist, erhält man den Ausdruck

$$\boldsymbol{H}_{\text{außen}} = -\frac{1}{4\pi}m\left[\frac{1}{r^3}\boldsymbol{e}_z - 3\frac{z}{r^5}\boldsymbol{r}\right].$$

In Inneren ist

$$\boldsymbol{H}_{\text{innen}} = \frac{M_0}{\chi_M}\boldsymbol{e}_z$$

nicht weiter umzuformen.

Nun müssen wir die Maxwellgleichungen und die Integralsätze anwenden. Aus $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}$ folgt

$$\int_A \mathrm{d}\boldsymbol{F}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{H}] = \int_A \mathrm{d}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j},$$

dabei ist F eine kompakte Fläche in einer $\phi = \text{const}$-Ebene, die die Oberfläche umschließt. $\boldsymbol{F}$ ist proportional zu $\boldsymbol{e}_\phi$. Nun wenden wir den Satz von Stokes an und erhalten auf der linken Seite

$$\int_{\partial F} \mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H} = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}.$$

Nun müssen wir eine nützliche Fläche wählen, so dass wir etwas über $a(\theta$ erfahren können. Dazu wählen wir eine Fläche, die knapp den Schnitt des Kugelrandes bedeckt. Die Teilstrecke l_1 geht innen am Kugelrand entlang, die Teilstrecke l_2 in entgegengesetzter Richtung außen. Die Teilstücke n_1 und n_2 verlaufen Radial. Die Fläche F ist also ein Stück aus einem Kreisring. Da in Radialrichtung kein Sprung ist, heben sich die Teile entlang n_1 und n_2 direkt auf. Das Integral ist nun in der Form

$$\boldsymbol{H}_{\text{innen}} \cdot \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{H}_{\text{außen}} \cdot \boldsymbol{l}_2 = \int_F \mathrm{d}\boldsymbol{F} \cdot a(\theta)\delta(r-R)\boldsymbol{e}_\phi \,.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass wir die Fläche F so klein machen können, dass sich $\boldsymbol{H}$ jeweils auf den Seiten nicht sonderlich ändert und daher mit dem mittleren Wert angenommen werden kann. $\boldsymbol{H}$ hat natürlich einen Sprung, den wir jetzt hier ausrechnen möchten. Bei der Stromdichte $\boldsymbol{j}$ gilt das gleiche. Die δ-Distribution setzt den Radius auf R fest. Der Flächeninhalt ist $R\,\Delta\theta$ wobei $\Delta\theta$ die Bogenlänge ist. Dies soll klein sein, damit sich $\boldsymbol{j}$ nicht stark verändert. Somit können wir die rechte Seite vereinfachen zu

$$\boldsymbol{H}_{\text{innen}} \cdot \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{H}_{\text{außen}} \cdot \boldsymbol{l}_2 = R\,\Delta\theta\, a(\theta) \,.$$

Mit dem Flächenmaß entsprechender Konvention für die Richtung der Schleife kommen wir beim Magnetfeld dann auf

$$R\,\Delta\theta \left[-H_{\theta,\text{innen}} + H_{\theta,\text{außen}}\right] = R\,\Delta\theta\, a(\theta) \,.$$

Der Radius und die Bogenlänge lassen sich hier auf beiden Seiten entfernen. Somit haben wir

$$-H_{\theta,\text{innen}} + H_{\theta,\text{außen}} = a(\theta) \,.$$

Nun sind wir einem Ausdruck für a sehr nahe. Wir können nun das Magnetfeld einsetzen. Dadurch wird der Ausdruck erstmal wieder länger und wir erhalten

$$-\frac{M_0}{\chi_M}\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{4\pi} m \left[\frac{1}{r^3}\boldsymbol{e}_z - 3\frac{z}{r^4}\boldsymbol{e}_r\right] \cdot \boldsymbol{e}_\theta = a(\theta) \,.$$

Das Skalarprodukt $\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_\theta$ gibt uns $-\sin(\theta)$ im ersten und zweiten Summanden. Im dritten Summanden gibt $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r$ null, da es sich um eine orthogonale Basis handelt.

$$\frac{M_0}{\chi_M} \sin(\theta) + \frac{1}{4\pi} m \frac{1}{r^3} \sin(\theta) = a(\theta) \,.$$

Weiterhin müssen wir $m = 4\pi M_0 r^3/3$ einsetzen.

$$\frac{M_0}{\chi_M}\sin(\theta) + \frac{M_0}{3}\sin(\theta) = a(\theta)\,.$$

Zuvor haben wir schon $z/r = \cos(\theta)$ benutzt. Dies nutzen wir hier erneut in die andere Richtung. Somit erhalten wir ein Ergebnis vollkommen unabhängig vom Radius r:

$$\frac{M_0}{\chi_M}\sin(\theta) + \frac{M_0}{3}\sin(\theta) = a(\theta)\,.$$

Ausklammern gibt uns

$$M_0\sin(\theta)\left[\frac{1}{\chi_M} + \frac{1}{3}\right] = a(\theta)\,.$$

Das ist das Endergebnis und stimmt mit der Lösung von Nolting [1] überein. Man kann die Brüche noch auf einen Nenner bringen, wenn man das möchte.

Literatur

[1] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3*. 8. Berlin: Springer-Verlag. ISBN: 978-3-540-71251-8.