Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik311.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik311/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik311 – Übung 11

Gruppe 3 – Matthias Rehberger

Martin Ueding

mu@uni-bonn.de

2012-12-23

Aufgabe	37	38	39	$\sum$
Punkte	✓	✓	✓	100%

37. Fourier-Spektrometer

In welche Richtung wird der Spiegel bewegt? Ich nehme an, dass er in Strahlrichtung bewegt wird.

37a.

Die Intensität hatte ich auf einem vorherigen Aufgabenblatt (Aufgabe 29a) bestimmt. Dabei war die Intensität als Funktion des Gangunterschieds δ gegeben durch:

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos(\delta)\right)$$

Du meinst sicher $\frac{1}{2}$, sonst könnte $I(\delta) = 4 \cdot I_0$ annehmen...

Die zusätzliche Weglänge Δ, die das Licht zurücklegen muss ist $\Delta(t) = 2\nu t$, dabei habe ich $\Delta(0) = 0$ gewählt. Der Gangunterschied ist mit der Wellenzahl $k = 2\pi f / c$:

warum \nu?

$$\delta(t) = 4\pi\nu t \frac{f}{c}$$

Dies setze ich in $I(\delta)$ ein und erhalte:

$$I(t) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(4\pi\nu \frac{f}{c} t\right)\right)$$

OK!

37b.

Beim Helium-Neon-Laser überlagern sich die drei Frequenzen. Die Gangunterschiede $\Delta = 2\nu t$ sind für alle Frequenzen gleich. Aufgrund der unterschiedlichen Wellenzahlen sind die Phasenunterschiede δ_i allerdings nicht gleich. Außerdem können selbst bei $\Delta = 0$ schon Phasenunterschiede durch die unterschiedlichen Frequenzen auftreten. Ich nehme ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass das Interferometer so bemessen ist, dass für $\Delta = 0$ alle $\delta_i = 0$ sind.

Der Phasenunterschied der Wellen zur ersten Welle ist:

$$\delta_i = \underbrace{k_i \Delta}_{\text{Gangunterschied}} + \underbrace{(\omega_1 - \omega_i)\, t}_{\text{Schwebung}}$$

Dabei ist $\omega_1 - \omega_i = \pm 2\pi a$ für die Wellen 2 und 3. Insgesamt interferieren 6 Wellen miteinander, die folgende Phasenunterschiede bezogen zur Welle $1a$ haben:

$$\delta_{1a} = 0 \qquad \delta_{1b} = 4\pi\nu \frac{f_0}{c} t$$

$$\delta_{2a} = 2\pi a t \qquad \delta_{2b} = 2\pi a t + 4\pi\nu \frac{f_0 + a}{c} t$$

$$\delta_{3a} = -2\pi a t \qquad \delta_{3b} = -2\pi a t + 4\pi\nu \frac{f_0 - a}{c} t$$

Die Amplitude der überlagerten Welle ist:

$$A(t) = \sum_{i=0}^{3} \frac{I_i}{2} \left(\begin{pmatrix} \cos(\phi_{ia}) \\ \sin(\phi_{ia}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\phi_{ib}) \\ \sin(\phi_{ib}) \end{pmatrix} \right)$$

Die Intensität ist das ganze zum Quadrat, $I(t) = A^2(t)$. Falls $a \ll f_0$ ist, ist die resultierende Schwebung sichtbar. Ich gehe davon aus, dass a im Bereich von THz oder großer liegt, so dass die Schwebung nicht sichtbar ist. Daher kann ich einfach die Intensitäten der drei Frequenzen überlagern.

Somit ist die Zeitabhängigkeit nur durch die Bewegung des Spiegels und nicht durch die Schwebung gegeben:

$$I(t) = 2 \sum_{i=1}^{3} I_i \left(1 + \cos\left(4\pi\nu \frac{f_i}{c} t \right) \right)$$

$$= 2 \left(I_1 + I_2 + I_3 + I_1 \cos\left(4\pi\nu \frac{f_0}{c} t \right) + I_2 \cos\left(4\pi\nu \frac{f_0 + a}{c} t \right) + I_3 \cos\left(4\pi\nu \frac{f_0 - a}{c} t \right) \right)$$

Ok!

37c.

Mit den gegebenen Intensitäten und die t durch Δ ersetzt:

$$I(\Delta) = 2I_0 \left(4 + \cos\left(2\pi \frac{f_0}{c} \Delta \right) + 2\cos\left(2\pi \frac{f_0 + a}{c} \Delta \right) + \cos\left(2\pi \frac{f_0 - a}{c} \Delta \right) \right)$$

Für $f/a = 10$ erhalte in willkürlichen Einheiten wieder eine Schwebung, siehe Abbildung 1.

Für Minimal- und Maximalwert ist die Einhüllende interessant. Aus einem Plot mit $f/a = 100$, bei dem die einhüllende abzulesen ist, erhalte ich an den extremsten Stellen $I_{max} = 8$ und $I_{min} = 0$. An den mittleren Stellen ist $I_{max} = 6$ und $I_{min} = 2$. An den kontrastärmsten Stellen ist $I_{max} = 5$ und $I_{min} = 3$. Somit sind die Kontraste:

Du meinst $I_{max} = 8 \cdot I_0$

$$K = 1, \quad K' = \frac{1}{2}, \quad K'' = \frac{1}{4}$$

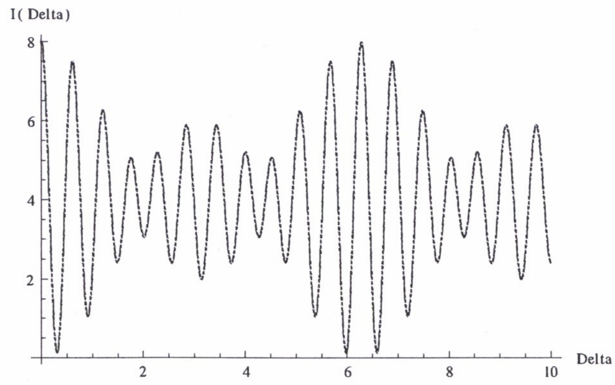

Abbildung 1: $I(t)$ für $f/a = 10$

38. Auflösungsvermögen abbildender Instrumente

38a. Digitalkameras

Die numerische Apertur N ist ungefähr:

$$N \approx \sin\phi \approx \frac{r}{f} = \frac{D}{2f}$$

Angenommen, es handelt sich um eine Fotokamera mit quadratischen Pixeln (und keine PAL oder HDV Videokamera), dann ist der Abstand d zweier Pixel:

$$\frac{5\ \mathrm{mm}}{d} = \sqrt{8\cdot 10^6} \iff d = 1.77\ \mu\mathrm{m}$$

Der Pixelabstand steht mit der numerischen Apertur in Verbindung:

$$d \approx \frac{\lambda}{N}$$

Bei grünen Licht von $\lambda \approx 500$ nm müsste die numerische Apertur der Optik mindestens 0.28 sein, damit der Sensor an seine Grenze kommt. Bei $f/D = 3.5$ ist die numerische Apertur allerdings 0.57, so dass das Objektiv der begrenzende Faktor ist. Das Objektiv würde erst bei einem Pixelabstand von 875 nm an seine Grenzen kommen. ?

Für die Zielgruppe der Elektronikmarktwerbung ist wahrscheinlich die Angabe der Megapixel nicht das wichtigste. Ähnlich wie der Kilopreis beim Waschmittel ist die *Megapixel pro Preis* Angabe viel wichtiger. So kommen einfache Spiegelreflexkameras auf 11 k/€, die teuren Kameras jedoch nur auf 5 k/€. Mobiltelefone liegen in dieser Hinsicht mit bis zu 30 k/€ noch am besten.

38b. Mondlandung

Die Brennweite des Spiegels ist:

$$f = \frac{r}{2} = 14.5\ \mathrm{m}$$

Die Winkelauflösung des Systems ist: [2, 11.1.5]

$$\phi \approx 1.22\frac{\lambda}{r} = 37\ \mathrm{nrad}$$

Wie berechnet?

Bei einer Entfernung zum Mond von 380 Mm entspricht dies einem Abstand von 14 m auf dem Mond. Da die Raumfähre und der Rover eher in der Größenordnung 5 m sind, kann man sie daher mit diesem Teleskop nicht sehen.

OK!

Unabhängig davon würden Skeptiker sich nicht mit einem Foto des Mondes zufrieden geben, weil man die Mondlandung dort sicher nachträglich eingearbeitet hätte.

39. Intensitätstransmission durch Polarisatoren

39a. Polarisationsrichtung

Nachdem das Licht durch den Linearpolarisator getreten ist, ist es linear polarisiert.

Das zirkulär polarisierte Licht kann ich als Überlagerung von zwei ebenen Wellen auffassen. Dabei sei die eine Welle in Richtung des Polarisators, die andere senkrecht dazu. Beide Wellen haben die Amplitude A_0. Die Intensität der Welle vor dem Polarisator ist dann:

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2} = \sqrt{2}A_0$$

Die Intensität ist $I = A^2 = 2A_0$. Nach dem Polarisator ist nur noch die eine Welle da. Somit ist die Intensität nur noch $A_0^2 = I/2$.

OK!

Bild stammt aus [1].

39b.

Die Amplitude der nun linear polarisierten Welle wird durch einen Polarisator, der um Θ verdreht ist, wird mit dem Faktor $\cos(\Theta)$ multipliziert.

Durch den letzten Polarisator wird das Licht dann noch um $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)$ reduziert.

Die Intensität ist dann das Quadrat der Amplituden, also:

$$I_0 \cos^2(\Theta) \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right)$$

Wenn man den zweiten Polarisator weglässt, stehen die beiden verbleibenden Polarisatoren senkrecht zueinander und somit kann kein Licht durchkommen, $I = 0$. Dies ist auch zu sehen, wenn man in die obige Formel $\Theta = 0$ oder $\Theta = \pi/2$ einsetzt. Dann wird einer der Kosinusterme 0. ✓

39c.

Ähnlich zur vorherigen Aufgabe ist der Faktor der Intensität:

$$\prod_{i=1}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right)$$

Im Grenzwert $n \to \infty$ wird das Argument des Kosinus klein, so dass ich es um 0 entwickeln kann. Alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ können vernachlässigt werden. Da $\cos(x) = 1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)$, gilt somit:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \cos^2\left(\frac{\pi}{2(n-1)}\right) = 1$$

Unendlich viele ideale Polfilter können das Licht also ohne Intensitätsverlust drehen. Ok!

Literatur

[1] Know Your Meme. You don't say? `http://knowyourmeme.com/memes/you-dont-say`.

[2] Dieter Meschede. *Gerthsen Physik*. Springer, 24. edition, 2010.