Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik311.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik311/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik311 – Übung 10

Gruppe 3 – Matthias Rehberger

Martin Ueding

mu@uni-bonn.de

2012-12-21

Aufgabe	33	34	35	36	$\sum$
Punkte	✓	0	✓	✓ - -	70,8%

33. dielektrische Vielfachschichten

33a. Einsetzen und Ausrechnen für Dreifachschicht

Diese Aufgabe habe ich in *Mathematica* gerechnet. [1] Dazu habe ich zuerst einige Variablen definiert:

$$n_0 := 1, \quad n_1 := 1.38, \quad n_2 := 2.30, \quad n_3 := 1.76, \quad n_4 := 1.63$$

$$\delta_j := \frac{2\pi}{\lambda_0} n_j 2 L_j \cos\left(\theta_j\right)$$

$$L_1 := \frac{\lambda_0}{4n_1}, \quad L_2 := \frac{2\lambda_0}{4n_3}, \quad L_3 := \frac{3\lambda_0}{4n_3}$$

$$\theta_j := 0$$

$$\mathsf{M}_j := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\delta_j}{2}\right) & \mathrm{i}\sin\left(\frac{\delta_j}{2}\right)\frac{1}{n_j} \\ \mathrm{i}\sin\left(\frac{\delta_j}{2}\right) n_j & \cos\left(\frac{\delta_j}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{P} := \mathsf{M}_3\mathsf{M}_2\mathsf{M}_1$$

Das passt nicht zur Aufgabenstellung

$$\mathsf{E} := \begin{pmatrix} n_0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathsf{P} \begin{pmatrix} 1 \\ n_f \end{pmatrix}$$

Im Mathematica-Sheet steht was anderes!

Ich setze für $f = 4$ in die gegebenen Formeln ein.

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -0.7841 & 2.8387 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{i} \\ 4.9059 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{i} & -1.2754 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1.2947 - 2.7876 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{i} \\ -2.8629 + 9.5331 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Daraus bestimme ich r:

$$r = \left|\frac{a}{b}\right|^2 = 0.204527$$

[1] Die Datei ist auf `http://uni-bonn.de/~s6mauedi/physik311/` zu finden.

33b. alternierende Folge

Mir fehlten Werte für n_H und n_L, diese sind auch nicht aus der Rechnung herausgefallen wir das λ_0 in der vorherigen Aufgabe.

Ausgehend von den Variablendeklarationen der vorherigen Teilaufgabe habe ich einige geändert:

$$\delta_j := \pi$$

$$n_j := \begin{cases} n_H & \frac{j}{2} \notin \mathbb{Z} \\ n_L & \frac{j}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Der Tensor M_j bleibt wie vorhin, nur dass das neue n_j und δ_j benutzt werden. Dann habe ich durch Ausprobieren so lange $\mathsf{M}_2\mathsf{M}_1$ an den Tensor P gehängt, bis die Reflektivität bei $n_H = 1.5$ und $n_L = 1.1$ über 0.999 gestiegen ist. Dafür musste ich $N = 30$ Schichten benutzen.

Ok!

34. Auflösungsvermögen eines Fernrohrs

Der Sehwinkel ϕ zwischen zwei Objekten muss größer sein als λ/r, damit die Beugungsscheibchen sich nicht überdecken. Bei $r = 2.5$ m und $\lambda = 500$ nm ist dies ein Winkel von $\phi = 200$ nrad. Bei einer Entfernung von 380 Mm entspricht dies einem Abstand von 76 m.

Das Auge hat eine Auflösung von $\phi' = 125$ µrad, ist also gut um einen Faktor 500 schlechter. Die Objekte auf dem Mond müssten dann schon 47.5 km auseinander sein.

Wie kommst du an diese Werte? Nicht nachvollziehbar!

35. Fourierreihenentwicklung und -transformation

35a. Fourierreihe

Gegeben ist die Funktion $f(t) = |\sin(t)|$. Es soll die Fourierreihe bestimmt werden.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, |\sin(t)| \cos(nt) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{d}t\, \sin(t)\cos(nt) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\cos(nt)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t\, \cos(t)\sin(nt)n \end{aligned}$$

Ich wende wieder partielle Integration an, dabei ist der erste Term 0.

$$= \frac{2}{\pi}\left((-1)^n + 1\right) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t\, \sin(t)\cos(nt)n^2$$

Jetzt habe ich etwas weiter oben und in der vorherigen Zeile das gleiche Integral stehen. Ich bringe beides auf eine Seite und erhalte:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\left(1 - n^2\right)\int_0^{\pi} \mathrm{d}t\, \sin(t)\cos(nt) &= \frac{2}{\pi}\left((-1)^n + 1\right) \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t\, \sin(t)\cos(nt) &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2} \end{aligned}$$

Dies ist gerade der gesuchte Koeffizient.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}$$

Die Bestimmung der b_n geht schneller: Die Funktion $|\sin(t)|$ ist gerade, die Funktion $\sin(nt)$ ungerade. Somit ist das Integral über ein bei 0 zentriertes Intervall gerade 0.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\, |\sin(t)| \sin(nt) = 0 \quad ✓$$

Die Komponente a_0 ergibt sich aus a_n. Dies ist auch direkt der Gleichstromanteil.

$$a_0 = \frac{4}{\pi} = 1{,}27\ldots$$ kann nicht der Gleichspannungsanteil sein, da > 1!

Die Fourierreihe ist:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n + 1}{1 - n^2}\cos(nt)$$

Ok!

35b. Puls

Gegeben ist $f(t)$, es soll die Fouriertransformierte bestimmt werden:

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\gamma t) & t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Fouriertransformierte ist:

$$\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, f(t) \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\, \exp(-\gamma t)\exp(-\mathrm{i}\omega t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}t\, \exp\left(-(\gamma + \mathrm{i}\omega)t\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{-(\gamma + \mathrm{i}\omega)}\left[\exp\left(-(\gamma + \mathrm{i}\omega)t\right)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\gamma + \mathrm{i}\omega} \quad ✓ \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\gamma - \mathrm{i}\omega}{\gamma^2 + \omega^2} \quad ✓
\end{aligned}$$

35c. Amplitude und Phase

Ich setze $\omega = \gamma$ ein. Der Betrag ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\gamma} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}\gamma}$$

Die Phase ist $-\pi/4$.

Nun setze ich $\omega = 2\gamma$ ein. Der Betrag ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{5}}{5\gamma} = \frac{1}{\sqrt{10\pi\gamma}}$$

Die Phase ist $\arctan(-2)$.

Das Amplitudenverhältnis ist:

$$\sqrt{\frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$ ✓

Und die Phasendifferenz:

$$\left|\frac{\pi}{4} - \arctan(2)\right|$$ ✓

35d. Rechteckfunktion

Gegeben ist eine Spektralfunktion $f(\omega)$:

$$f(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta\omega} & \left|\omega - \omega_0\right| \leq \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die ursprüngliche Funktion ist:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} \mathrm{d}\omega \, \exp(\mathrm{i}\omega t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}t\Delta\omega} \left[\exp(\mathrm{i}\omega t)\right]_{\omega_0-\Delta\omega/2}^{\omega_0+\Delta\omega/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\mathrm{i}t\Delta\omega} \exp(\mathrm{i}\omega_0 t) \left(\exp\left(\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\mathrm{i}t\Delta\omega} \exp(\mathrm{i}\omega_0 t) \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \end{aligned}$$

Für $\Delta\omega \to 0$ wird die Spektralfunktion zu einer δ-Distribution. Diese enthält genau eine Frequenz, ω_0, es kommt also genau eine Sinusschwingung heraus. Durch Einsetzen und die Regel von l'Hospital erhalte ich:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{i}} \exp(\mathrm{i}\omega_0 t)$$

Ok!

Umgekehrt wird ein beliebig kurzer Lichtpuls eine Sinuswelle im Frequenzraum.

36. Beugungsverluste in einem Resonator

36a. Fresnelzahl

Der Radius der Zonen ist gegeben durch:

$$r^2 = \left(d + \frac{N\lambda}{2}\right)^2 - d^2$$

Der maximale Radius ist der Spiegelradius, also a. Somit kann ich nach N umstellen und erhalte:

$$\cancel{n}\,N = \frac{a^2}{\lambda d}$$

Ok!

36b. relativer Begungsverlust

Hier fehlen noch Inhalte.

36c. Lichtleistung

Hier fehlen noch Inhalte.