

Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik311.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik311/ gefunden werden.

Sofern im Dokument nichts anderes angegeben ist: Dieses Werk von Martin Ueding ist lizenziert unter einer [Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz](#).

[disclaimer]

physik311 – Übung 5

Gruppe 3 – Matthias Rehberger

Martin Ueding

mu@uni-bonn.de

2012-11-15

Aufgabe	17	18	19	Σ
Punkte	✓	✓	✓	100%

17 ABCD-Matrizen

17a Zeichnung

Eine Zeichnung ist in Abbildung 1.

17b ABCD-Matrix des Systems

Die Matrizen der beiden Linsen und des Weges in der Mitte sind:

$$\underset{L_1}{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 \text{ m}^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{T}{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.35 \text{ m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underset{L_2}{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 \text{ m}^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{D} für das Gesamtsystem berechnet sich durch $D^a_d := \underbrace{A^a_b B^b_c C^c_d}$ (mit Summenkonvention) (Abbildung 2) zu:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -0.75 & 0.35 \text{ m} \\ 2.5 \text{ m}^{-1} & -2.5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{CBA}$$

Die Determinante $\det(\mathbf{D})$ ist 1. (✓)

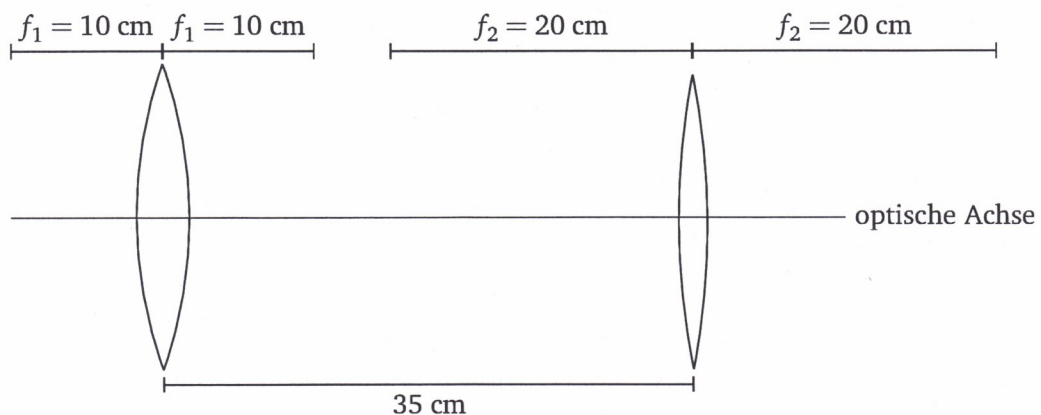


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 17

Eine schöne Notationsweise,
aber hast du es auch
richtig verstanden?

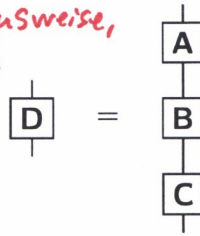


Abbildung 2: penrosesche graphische Notation zur Tensorcontraktion

17c Lichtstrahl

Ein Lichtstrahl ist gegeben durch:

$$l = \begin{pmatrix} 1 \text{ mm} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Position nach der Linsenordnung, n , wird durch $n^a = D^a_b l^b$ gegeben:

$$n = \begin{pmatrix} -0.75 \text{ mm} \\ 2.5 \text{ mrad} \end{pmatrix} \quad \text{Ansatz ist richtig, leider dein D nicht...}$$

Und die Position noch einen Meter später, m , wird mit der geraden Ausbreitungsmatrix E bestimmt durch $m^a = E^a_b n^b$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \text{ m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 1.75 \text{ mm} \\ 2.5 \text{ mrad} \end{pmatrix}$$

Der Strahl hat also nach der Linsenordnung und nach einem Meter den Abstand 0.75 mm beziehungsweise 1.75 mm von der Achse.

Nach einem Meter hinter den Linsen sollte der Abstand von der Achse null sein...

18 konfokaler optischer Resonator

Die Matrix für den Spiegel und Distanz sind:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zusammen ergeben Sie die Matrix R für einen kompletten Zyklus im Resonator ($R^a_e = S^a_b D^b_c S^c_d D^d_e$): ✓

$$R = \begin{pmatrix} \frac{r-2d}{r} & \frac{2d(r-d)}{r} \\ \frac{4(d-r)}{r^2} & \frac{4d^2 - 6dr + r^2}{r^2} \end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Matrix, die auf dem Aufgabenblatt angegeben ist.

Für den Fall $r = d$ vereinfacht sich die Matrix zur negativen Einheitsmatrix. Das Quadrat davon ist die Einheitsmatrix. ✓

19 achromatisches Linsendublett

19a Herleitung

Ich schreibe $f_x := f(\lambda_x)$. Zur Herleitung beginne ich mit der Definition von A:

$$A = f_r - f_b$$

$$A = \frac{f_r - f_b}{f_g^2} f_g^2$$

Ich benutze die zweite Beziehung.

$$A = \frac{f_r - f_b}{f_r f_g} f_g^2$$

$$A = \left(\frac{1}{f_b} - \frac{1}{f_r} \right) f_g^2$$

$$A = \frac{\frac{1}{f_b} - \frac{1}{f_r}}{\frac{1}{f_g}} f_g$$

$$A = \frac{\frac{k}{f_b} - \frac{k}{f_r}}{\frac{k}{f_g}} f_g$$

Ich benutze die erste Beziehung.

$$A = \frac{(n_b - 1) - (1 - n_r)}{n_g - 1} f_g$$

$$A = \frac{n_b - n_r}{n_g - 1} f_g$$

Ich setze B ein.

$$A = B f_g$$

OK!

19b Verhältnis

Es soll für das die chromatische Aberration A des Gesamtsystems gelten: $A = 0$. Die Brechkräfte der einzelnen Linsen addieren sich auf, so dass für die Summen gelten muss:

$$f_r - f_b = 0$$

Diese Brennweiten kann ich jetzt als Summe der einzelnen Brennweiten ausdrücken:

$$\frac{1}{\frac{1}{f_{1,r}} + \frac{1}{f_{2,r}}} - \frac{1}{\frac{1}{f_{1,b}} + \frac{1}{f_{2,b}}} = 0$$

$$\frac{f_{1,r} f_{2,r}}{f_{1,r} + f_{2,r}} - \frac{f_{1,b} f_{2,b}}{f_{1,b} + f_{2,b}} = 0 \quad \checkmark$$

Jetzt forme ich das ganze noch etwas weiter um. Nach fünf Schritten erhalte ich:

$$\frac{f_{1,r} f_{1,b}}{f_{1,r} + f_{1,b}} - \frac{f_{2,r} f_{2,b}}{f_{2,r} + f_{2,b}} = 0$$

An dieser Stelle benutze ich die zweite Beziehung aus der vorherigen Aufgabe sowie die Definition von A.

$$\frac{f_{1,g}^2}{A_1} + \frac{f_{2,g}^2}{A_2} = 0$$

Nun setze ich $A = Bf_g$ ein und kürze das f_g .

$$\frac{f_{1,g}}{B_1} + \frac{f_{2,g}}{B_2} = 0$$

Umgestellt erhalte ich die gesuchte Beziehung.

$$\frac{f_{1,g}}{f_{2,g}} = -\frac{B_1}{B_2} \quad \checkmark$$

Hierbei zählt die Brennweite der konkaven Linse als negativ. Würde man hier Beträge benutzen, entfielen das Minus.

19c konkrete Werte

Zuerst bestimme ich B_1 und B_2 aus den Daten:

$$B_1 = 0.0154739, \quad B_2 = 0.0274194$$

Die Brennweite einer gekrümmten Fläche ist¹:

$$f' = r \frac{n'}{n' - n}$$

Linsenschleifergleichung und Ergebnis aus b) benutzen!

Die Gesamtbrennweite des Systems ist:

$$\frac{1}{f} = \frac{n_1 - 1}{r_1 n_1} + \frac{n_2 - n_1}{r_2 n_2} + \underbrace{\frac{1 - n_2}{r_3}}_{\rightarrow 0}$$

Um eine zweite Gleichung für dieses System zu erhalten, muss ich das ganze für rotes und blaues Licht betrachten:

$$4 \text{ m}^{-1} = \frac{n_{1,r} - 1}{r_1 n_{1,r}} + \frac{n_{2,r} - n_{1,r}}{r_2 n_{2,r}}$$

$$4 \text{ m}^{-1} = \frac{n_{1,b} - 1}{r_1 n_{1,b}} + \frac{n_{2,b} - n_{1,b}}{r_2 n_{2,b}}$$

Dieses Gleichungssystem habe ich in Mathematica nach r_1 und r_2 lösen lassen. Als Ergebnis erhalte ich:

$$r_1 = 0.0946487 \text{ m} \quad \wedge \quad r_2 = 0.151399 \text{ m}$$

Wenn ich allerdings grün und rot benutze, erhalte ich:

$$r_1 = 0.0949488 \text{ m} \quad \wedge \quad r_2 = 0.154827 \text{ m}$$

Eigentlich sollte das gleiche herauskommen. Außerdem würde ich erwarten, dass der r_2 negativ ist, so wie in der Zeichnung dargestellt.

OK!

¹https://de.wikipedia.org/wiki/Brennweite#Brechende_Fl.C3.A4che