Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 12
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

4. Juli 2012

Aufgabe	H.26	H.27	H.28	Σ
Punkte	/ 20	/ 6	/ 4	/ 20

Aufgabe H.26 Überlagerung

Aufgabe H.26a Lagrangefunktion

Die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten ist:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - \frac{\gamma}{r} + Fz$$

Dabei ist:

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Aufgabe H.26b neue Koordinaten

Wir substituieren neue Koordinaten:

$$\rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad \dot{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}}\left(\dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(\xi - \eta\right), \quad \dot{z} = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi} - \dot{\eta}\right)$$

Die Lagrangefunktion ist jetzt:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{4\xi\eta}\left(\dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}\right)^2 + \xi\eta\dot{\phi}^2 + \frac{1}{4}\left(\dot{\xi} - \dot{\eta}\right)^2\right) - \frac{2\gamma}{\xi + \eta} + \frac{1}{2}F\left(\xi - \eta\right)$$

Aufgabe H.26c Impulse und Hamiltonfunktion

Nun bestimmen wir die kanonischen Impulse:

$$p_\phi = m\xi\eta\dot{\phi}, \quad p_\eta = \frac{m}{4}\dot{\eta}\left(\frac{\xi}{\eta} + 1\right), \quad p_\xi = \frac{m}{4}\dot{\xi}\left(\frac{\eta}{\xi} + 1\right)$$

Wir formen die Impulse noch nach den Geschwindigkeiten um, damit wir diese in der Lagrangefunktion ersetzen können.

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m\xi\eta}, \quad \dot{\eta} = \frac{4p_\eta}{m\left(\frac{\xi}{\eta} + 1\right)}, \quad \dot{\xi} = \frac{4p_\xi}{m\left(\frac{\eta}{\xi} + 1\right)}$$

Damit können wir nun die Hamiltonfunktion zusammensetzen:

$$\begin{aligned} H &= p_\phi \dot{\phi} + p_\xi \dot{\xi} + p_\eta \dot{\eta} - L \\ &= \frac{p_\phi^2}{m\xi\eta} + \frac{4p_\xi^2}{m\left(\frac{\eta}{\xi}+1\right)} + \frac{4p_\eta^2}{m\left(\frac{\xi}{\eta}+1\right)} - L \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Lagrangefunktion mit den ersetzten Geschwindigkeiten für L ein. Dann vereinfachen wir die Funktion.

$$= \frac{2}{m}\frac{\xi p_\xi^2 + \eta p_\eta^2}{\xi\eta} + \frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta} + \frac{2\gamma}{\xi+\eta} - \frac{1}{2}F\left(\xi - \eta\right)$$

Aufgabe H.26d Hamilton-Jakobi-Gleichung

Als Ansatz können wir wählen:

$$S(\xi, \eta, \phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, t) = W(\xi, \eta, \phi, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \alpha_1 t$$

Wir ersetzen nun in $H(q,p)$ die Impulse p_i durch $\frac{\partial W}{\partial q_i}$.

$$\frac{2}{m\left(\xi+\eta\right)}\left(\xi\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \eta\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2\right) + \frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{2\gamma}{\xi+\eta} - \frac{F}{2}\left(\xi-\eta\right) =: a_1 \qquad (1)$$

Aufgabe H.26e Wirkungsfunktion

Die Hamiltonfunktion hängt nicht von ϕ ab. Damit ist ϕ eine zyklische Variable. Wir können α_1 mit der Energie identifizieren, wie wir es bereits oben getan haben. Somit können wir als Separierungsansatz benutzen:

$$W(\xi, \eta, \phi, E, \alpha_2, \alpha_3) = W_1(\xi, E, \alpha_2, \alpha_3) + W_2(\eta, E, \alpha_2, \alpha_3) + W_3(\phi, E, \alpha_2, \alpha_3)$$

Da ϕ zyklisch ist, ist

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \frac{\partial W_3}{\partial \phi} = p_\phi =: \alpha_2.$$

Diese Differentialgleichung können wir einfach lösen. Damit folgt für die Teilfunktion W_3:

$$W_3 = p_\phi \phi$$

Für den Rest gilt weiterhin (1). Dies können wir mit $m(\xi+\eta)$ multiplizieren, umstellen und erhalten:

$$2\xi\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{p_\phi}{2\xi} + 2m\gamma - \frac{mF}{2}\xi^2 - mE\xi = -2\eta\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{p_\phi^2}{2\eta} - \frac{mF}{2}\eta^2 + mE\eta$$

Zum einen sind jetzt die Variablen ξ und η separiert. Außerdem sind sie immer gleich (für alle ξ und η), also müssen diese konstant sein. Wir nennen sie α_3. Wir können nun die beiden Seite dieser Gleichung nach der Ableitung von W_1 und W_2 auflösen. Die Summer aller partiellen Integrationen über die W_i und die Energie E ergibt die gesuchte Wirkungsfunktion:

$$S = \int \sqrt{\frac{mE}{2} + \frac{\alpha_3 - 2m\gamma}{2\xi} + \frac{mF}{4}\xi - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}}\,\mathrm{d}\xi + \int \sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{\alpha_3}{2\eta} - \frac{mF}{4}\eta - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}}\,\mathrm{d}\eta + p_\phi\phi - Et$$

Aufgabe H.27 Kanonische Transformation? (Teil 1)

Aufgabe H.27a erste Transformation

Wir müssen die Differenz als Zeitableitung schreiben können:

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \left(q_i^2 + p_i^2\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \arctan\left(\frac{q_i}{p_i}\right)\right) \\
&= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \left(q_i^2 + p_i^2\right) \frac{-q_i \dot{p}_i + p_i \dot{q}_i}{p_i^2 + q_i^2}\right) \\
&= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2}\right) \left(q_i^2 + p_i^2\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \dot{p}_i q_i\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i q_i p_i
\end{aligned}$$

Somit ist F:

$$F = \frac{1}{2} \sum_i q_i p_i$$

Da F existiert, ist diese Transformation kanonisch.

Aufgabe H.27b zweite Transformation

Hier müsste man schauen, ob sich für die zweite Transformation ebenfalls eine Funktion F finden lässt.

Für das Produkt erhalten wir:

$$p\dot{q} - P\dot{Q} = \cot p \left(\dot{q} - q\dot{p} \cot p\right) + p\dot{q}$$

Wir wissen nicht, wie wir dies als totale Zeitableitung schreiben sollen. Daher ist diese Transformation wahrscheinlich nicht kanonisch.

Aufgabe H.28 Kanonische Transformation? (Teil 2)

Aufgabe H.28a erste Transformation

Diese Transformation ist kanonisch. In diesem Fall gilt immer $i = j$, da es ja nur einen Satz Koordinaten gibt (fehlende Indizes bei den Koordinaten).

Die ersten Klammern mit zwei Q oder zwei P sind natürlich immer 0, bei der gemischten Klammer kommt gerade 1 heraus.

Aufgabe H.28b zweite Transformation

$$[Q_i, Q_j] = \sum_{i,j} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}}_{=0} \right) = 0$$

$$[P_i, P_j] = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial p_i}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial P_i}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 0$$

$$[Q_i, P_j] = \sum_{i,j} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial p_i}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}}_{=1} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial q_i}}_{=-\delta_{ij}} \right) = \delta_{ij}$$

Diese Transformation ist kanonisch.

Aufgabe H.28c dritte Transformation

$$[Q_i, Q_j] = \sum_{i,j} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}}_{=0} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \underbrace{\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}}_{=0} \right) = 0$$

$$[P_i, P_j] = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial p_i}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial P_i}{\partial p_i}}_{=0} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) = 0$$

$$[Q_i, P_j] = \sum_{i,j} \left(\underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial q_i}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial p_i}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}}_{=1} \underbrace{\frac{\partial P_j}{\partial q_i}}_{=-\delta_{ij}} \right) = -\delta_{ij}$$

Diese Transformation ist nicht kanonisch.