Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 11
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

27. Juni 2012

Aufgabe	H.23	H.24	H.25	Σ
Punkte	/ 8	/ 6	/ 6	/ 20

Aufgabe H.23 Fadenpendel

Wir gehen davon aus, dass wir das Fadenpendel in zwei Dimensionen betrachten können.

Aufgabe H.23a Lagrange-, Hamiltonfunktion und totale Energie

Aufgabe H.23a.1 Lagrange

Die kinetische Energie ist:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$$

Die potentielle Energie ist:

$$V = mgz$$

Als Zwangsbedingung haben wir:

$$|\vec{r}| = l$$

In Polarkoordinaten ist die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos(\theta)$$

Damit bestimmen wir den kanonischen Impuls:

$$p_\theta = ml^2\dot{\theta}$$

Aufgabe H.23a.2 Hamilton

Nun können wir daraus die Hamiltonfunktion ableiten.

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + mgl\cos(\theta)$$

Aufgabe H.23a.3 totale Energie

Die totale Energie ist einfach $T + V$, also:

$$E_{\text{total}} = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta)$$

Aufgabe H.23b Bewegungsgleichungen

Aufgabe H.23b.1 Newton

Letztlich können wir eine Drehmomentbilanzgleichung aufstellen:

$$\sin(\theta)mgl = -ml^2\ddot{\theta}$$

Dies können wir noch vereinfachen.

$$\sin(\theta)g = -l\ddot{\theta}$$

Um diese Gleichung zu lösen, würde man sinnvollerweise die Kleinwinkelnäherung anwenden und käme dann auf die bekannte Lösung für das Pendel.

Aufgabe H.23b.2 Lagrange

Wir bestimmen die Euler-Lagrange-Gleichung für θ:

$$mgl\sin(\theta) + ml^2\ddot{\theta} = 0$$

Dies ist die gleiche Gleichung wie schon bei Newton.

Aufgabe H.23b.3 Hamilton

Aus der Hamiltonfunktion können wir die zwei kanonischen Gleichungen bestimmen:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}, \quad \dot{p}_\theta = mgl\sin(\theta)$$

Dies ist wieder das gleiche.

Aufgabe H.23c Erhaltung der Hamiltonfunktion

Da die Zwangsbedingungen holonom und skleronom sind, ist die Hamiltonfunktion die Energie. Da sie beide nicht explizit von der Energie abhängen, sind beides Erhaltungsgrößen.

Aufgabe H.23d Ansatz über die Energie

Es muss gelten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T + V) = 0$$

Einsetzen von T und V sowie Ableiten nach der Zeit liefert uns:

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\sin(\theta)\dot{\theta} = 0$$

Wir können ausklammern und erhalten in der Klammer dann die bereits merfach hergeleitete Bewegungsgleichung.

Aufgabe H.24 Hamilton-Funktion

Aufgabe H.24a Erhaltungsgrößen

Gegeben ist, dass sowohl H als auch F Erhaltungsgrößen sind. Ich bilde die totale Zeitableitung von F:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = \frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Dies können wir auch mit den partiellen Ableitungen der Hamiltonfunktion in einer Poissonklammer schreiben als:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Da H und F Erhalten sind, muss die Poissonklammer auch erhalten sein. Somit folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

Aufgabe H.24b bewegtes Bezugssystem

Das ruhende System ist gestrichen. Als Koordinaten wählen wir Zylinderkoordinaten. Die kinetische Energie ist einfach:

$$T' = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}'^2 + \dot{z}^2\right)$$

Die potenzielle Energie hängt nicht vom Winkel ϕ ab, sie ist:

$$V' = V(r, z)$$

Die Lagrangefunktion ist gegeben durch:

$$L' = T' - V' = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}'^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, z)$$

Nun transformieren wir in das bewegte Bezugssystem. Dabei gilt:

$$\phi + \omega t = \phi', \quad \dot{\phi} + \omega = \dot{\phi}'$$

Die Koordinaten r und z werden von der Transformation nicht verändert. Somit wird die neue kinetische Energie:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\phi} + \omega\right)^2 + \dot{z}^2\right)$$

Die potenzielle Energie wird nicht verändert:

$$V = V(r, z)$$

Die neue Lagrangefunktion ist:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\phi} + \omega\right)^2 + \dot{z}^2\right) - V(r, z)$$

Der Drehpimpuls in z-Richtung ist einfach p_ϕ:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\left(\dot{\phi} + \omega\right)$$

Da die Euler-Lagrange-Gleichung für ϕ gelten muss und ϕ zyklisch ist, ist p_ϕ eine Erhaltungsgröße.

Der Impuls für r ist:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

Und der Impuls für z:

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

Damit können wir nun die Hamiltonfunktion zusammenbauen:

$$\begin{aligned}
H &= \dot{r}p_r + \dot{\phi}p_\phi + \dot{z}p_z - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\dot{\phi}+\omega\right)^2 + \dot{z}^2\right) + V(r,z) \\
&= \frac{p_r^2}{m} + \left(\frac{p_\phi}{mr^2} - \omega\right)p_\phi + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + p_z^2\right) + V(r,z) \\
&= \frac{1}{2m}p_r^2 + \left(\frac{p_\phi}{2mr^2} - \omega\right)p_\phi + \frac{1}{2m}p_z^2 + V(r,z)
\end{aligned}$$

Aufgabe H.25 kanonische Transformation 2

Eine Transformation ist kanonisch, wenn die funamentalen Poissonklammern erhalten bleiben. Es muss also gelten:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}$$

Wir beginnen mit der ersten Klammer.

$$\begin{aligned}
\{Q_i, Q_j\} &= \sum_a \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_a}\frac{\partial Q_j}{\partial p_a} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_a}\frac{\partial Q_i}{\partial p_a}\right) \\
&= \sum_a \left(-p_a^{2\alpha-1}\alpha\beta\sin(\beta q_a)\cos(\beta q_a)\right)\left(\delta_{ia}\delta_{ja} - \delta_{ia}\delta_{ja}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden Transformationen ist ersichtlich, dass die Klammer mit den beiden P ebenfalls 0 ist. Wir betrachen nun die dritte Klammer.

$$\{Q_i, P_j\} = \sum_a \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_a}\frac{\partial P_j}{\partial p_a} - \frac{\partial P_j}{\partial q_a}\frac{\partial Q_i}{\partial p_a}\right)$$

Nur die Fälle $a = i = j$ sind ungleich 0, sodass wir direkt schreiben können:

$$\begin{aligned}
&= \delta_{ij}\left(-p_a^{2\alpha-1}\alpha\beta\left(\sin^2(\beta q_a)\cos^2(\beta q_a)\right)\right) \\
&= \delta_{ij}\left(-p_a^{2\alpha-1}\alpha\beta\right)
\end{aligned}$$

Die Klammer muss gerade 1 sein, sodass wir folgern können:

$$-\alpha\beta p_i^{2\alpha-1} = 1$$

Dies muss allerdings für alle i gelten. Somit kann der Exponent nur 0 sien, womit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\beta = -2$.

Eine Erzeugende $F_2(q, P)$ muss folgendes leisten:

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$$

Wir bauen die Funktion F_2 schrittweise zusammen und integrieren wir die erste Gleichung, die die Erzeugende erfüllen muss:

$$F_2(q, P) = \int p(q, P) \, \mathrm{d}q + g(P)$$

Dazu lösen wir die Transformationsgleichung, die uns P liefert, nach p auf und erhalten:

$$p = \left(\frac{P}{\sin(-2q)} \right)^2$$

Dies setzen wir in das Integral ein und integrieren. Wir erhalten:

$$F_2(q, P) = -\frac{1}{2} P^2 \cot(2q) + g(P)$$

Wir wissen allerdings auch, dass $\frac{\partial F_2}{\partial P} = Q$ sein muss. Wir können beide Seiten einsetzen und erhalten:

$$-P \cot(2q) + \frac{\partial g(P)}{\partial P} = \sqrt{p} \cos(-2q)$$

Dies formen wir nach $\frac{\partial g(P)}{\partial P}$ um und integrieren nach P:

$$g(P) = \sqrt{p} \cos(-2q) P + \frac{1}{2} P^2 \cot(-2q) + C$$

Eigentlich darf g gar nicht von q abhängen. Irgendwas ist hier schief gelaufen. Dies setzen wir oben für $g(P)$ ein und erhalten:

$$F_2(q, P) = \sqrt{p} \cos(-2q) P + C$$

Nun machen wir die Probe und leiten F_2 ab:

$$\frac{\partial F_2}{\partial P} = \sqrt{p} \cos(-2q) \stackrel{!}{=} Q$$

Dies stimmt. Wir machen noch die Probe in die andere Richtung und leiten nach q ab. Dies müsste dann p ergeben:

$$\frac{\partial F_2}{\partial q} = 2\sqrt{p} \sin(-2q) P \stackrel{!}{=} p$$

Das haut allerdings nicht so ganz hin.