Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 10
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

18. Juni 2012

Aufgabe	H.21	H.22
Punkte	/ 10	/ 10

Aufgabe H.21 Poisson-Klammern

Aufgabe H.21a Fundamentale Poisson-Klammern

Hier fehlen noch Inhalte.

Aufgabe H.21b Ableitungen durch Poisson-Klammern

Aufgabe H.21b.1 $\frac{\partial f}{\partial u}$

Hier fehlen noch Inhalte.

Aufgabe H.21b.2 $\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} &\stackrel{!}{=} \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} t} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

Ersetze mit kanonischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(- \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}\end{aligned}$$

Aufgabe H.21c Rechenregeln

Aufgabe H.21c.1 Produktregel

$$\begin{aligned}
\{fg,h\} &\stackrel{!}{=} f\{g,h\} + g\{f,h\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial(fg)}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial(fg)}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f\,\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{f\,\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} + \frac{g\,\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{g\,\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} \right) \\
&= f\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} \right) \right) + g\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_i} \right) \right) \\
&= f\{g,h\} + g\{f,h\}
\end{aligned}$$

Aufgabe H.21c.2 Totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f,g\} \stackrel{!}{=} \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} + \{\{f,g\},H\}$$

Ich setze:

$$\{f,g\} = x$$

Aus Aufgabe b.2 weiß ich:

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \{x,H\} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} &\stackrel{!}{=} \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial t}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial t}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\,\partial t} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\,\partial t} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\,\partial t}\frac{\partial g}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_i\,\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_i\,\partial t}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_i\,\partial t} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}
\end{aligned}$$

Aufgabe H.21c.3 Jacobi-Identität

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} \stackrel{!}{=} 0$$

Ich beginne mit dem ersten Summanden:

$$\begin{aligned}
\{f,\{g,h\}\} &= \sum_{j,i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\frac{\partial h}{\partial p_j}\right)\\
&\quad-\sum_{j,i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\\
&= \sum_{j,i=1}^{n}\Bigg(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}\right)\\
&\quad-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\,\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\,\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\right)\Bigg)\\
&= \sum_{j,i=1}^{n}\Bigg(\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}+\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\,\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\\
&\quad-\frac{\partial^2 f}{\partial q_j\,\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial^2 g}{\partial q_j\,\partial q_i}\frac{\partial h}{\partial p_j}-\frac{\partial^2 f}{\partial p_j\,\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial^2 g}{\partial p_j\,\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial q_j}\Bigg)
\end{aligned}$$

Addiert man die drei zyklisch vertauschten Poisson-Klammern von f, g und h löschen sich alle Terme aus. Damit gilt obige Bedingung.

Aufgabe H.22 Kanonische Transformation

Aufgabe H.22a a)

$$\begin{aligned}
&L(q,p,t)=L'(Q,P,t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(Q,q,t)\\
&\Leftrightarrow \sum_i \dot{q}_i p_i - H(q,p,t) = \sum_i \dot{Q}_i P_i - H'(Q,P,t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(Q,q,t)\\
&\qquad\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_1(Q,q,t)=\sum_i\left(\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial t}\right]\\
&\Leftrightarrow \underbrace{\sum_i \dot{q}_i p_i-\sum_i\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\dot{q}_i}_{\stackrel{!}{=}0} - H(q,p,t) = \underbrace{\sum_i \dot{Q}_i P_i+\sum_i\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\dot{Q}_i}_{\stackrel{!}{=}0} - H'(Q,P,t)+\frac{\partial F_1}{\partial t}\\
&\Rightarrow p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\quad;\quad P_i=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\quad\Rightarrow\quad H'(Q,P,t)=H(q,p,t)+\frac{\partial F_1}{\partial t}
\end{aligned}$$

Aufgabe H.22b b)

$$L(q,p,t)=L'(Q,P,t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{F}_2(P,q,t)\quad mit \hat{F}_2(P,q,t)$$

Aufgabe H.22c c)

Hier fehlen noch Inhalte.

Aufgabe H.22d d)

Hier fehlen noch Inhalte.