Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 9
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

17. Juni 2012

Aufgabe	H.18	H.19	H.20	Σ
Punkte	/ 6	/ 4	/ 10	/ 20

Konvention

Wir schreiben Potenzen von Funktionen als:

$$\sin(x)^n := (\sin(x))^n$$

Aufgabe H.17

Aufgabe H.18 Ableitung der Lagangegl mit den Legendre-Transformation

Wir setzen an:

$$L(q, \dot q, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot q_i p_i(q, \dot q, t) - H\left[q, p(q, \dot q, t), t\right]$$

Wir bilden das totale Differential auf beiden Seiten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; \mathrm{d}L &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \,\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \,\mathrm{d}\dot q_i\right] + \frac{\partial L}{\partial t} \,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\mathrm{d}\dot q_i p_i + \dot q_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} \,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial p_i}{\partial \dot q_i} \,\mathrm{d}\dot q_j\right) + \dot q_i \frac{\partial p_i}{\partial t} \,\mathrm{d}t - \frac{\partial H}{\partial q_i} \,\mathrm{d}q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i} \,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial p_i}{\partial \dot q_j} \,\mathrm{d}\dot q_j\right) - \end{aligned}$$

Wir setzten das gegebene ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot p_i &= \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

die ersten beiden Gleichungen führen zu den Lagrangegln.

Aufgabe H.19 Wagen

Aufgabe H.19a Hamiltonfunktion in verschiedenen Koordinatensystemen

In der Aufgabenstellung steht:

„[...] in kartesischen, zylindrischen und Koordinaten.“

Wir gehen davon aus, dass auch Kugelkoordinaten gemeint sind.

Aufgabe H.19a.1 kartesische Koordinaten

Die kinetische Energie ist einfach:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \tag{1}$$

Die potentielle Energie ist durch das Potential gegeben:

$$V = V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{2}$$

Zusammen ergeben (**??**) und (**??**) die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{3}$$

Wir rechnen den kanonischen Impuls aus:

$$p_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = m\dot{x}_i \quad i = 1, ..., 3$$

Die Hamiltonfunktion ist formal:

$$H = \underbrace{\sum_i \dot{x}_i p_{x_i}}_{2T} - L$$

Wir können dies schreiben als:

$$H = T + V$$

Dabei müssen wir allerdings die kinetische Energie nicht von $\dot{x}_i$ abhängig angeben, sondern von p_{x_i} abhängig abgeben. Somit ist die gesuchte Funktion:

$$H = \frac{m}{2}\sum_i p_{x_i}^2 + V\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \tag{4}$$

Aufgabe H.19a.2 zylindrische Koordinaten

In Zylinderkoordinaten ist die kinetische Energie gegeben durch:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}\right) \tag{5}$$

Die potentielle Energie ist einfach:

$$V = V\left(\sqrt{r^2 + z^2}\right) \tag{6}$$

Mit (**??**) und (**??**) erhalten wir die Lagrangefunktion:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}\right) - V\left(\sqrt{r^2 + z^2}\right) \tag{7}$$

Daraus bestimmen wir die kanonischen Impulse:

$$p_r = m\dot{r} \tag{8}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} \tag{9}$$

$$p_z = m\dot{z} \tag{10}$$

Daraus können wir die vorläufige Hamiltonfunktion, die noch von $\dot{q}$ abhängt, zusammensetzen:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - T + V \\
\hat{H} &= T + V \\
\hat{H} &= \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}\right) + V\left(\sqrt{r^2 + z^2}\right)
\end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die $\dot{q}$ eliminieren um die richtige Hamiltonfunktion zu erhalten. Wir stellen die kanonischen Impulse nach $\dot{r}$, $\dot{\phi}$ und $\dot{z}$ um.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + p_\phi^2 + p_z^2\right) + V\left(\sqrt{r^2 + p_z}\right)$$

Aufgabe H.19a.3 Kugelkoordinaten

Auch hier beginnen wir mit T und V:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \left(r\dot{\phi}\sin(\theta)\right)^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2\right) \tag{11}$$

Da r direkt die Entfernung von der Mitte ist, ist das Potential einfach:

$$V = V(r) \tag{12}$$

Wir setzen (**??**) und (**??**) zu der Lagrangefunktion zusammen:

$$T - V \tag{13}$$

Wir bestimmen die kanonischen Impulse:

$$p_r = m\dot{r} \tag{14}$$

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi}\sin(\theta)^2 \tag{15}$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} \tag{16}$$

Diese Impulse setzen wir nun ein und erhalten die Hamiltonfunktion:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin(\theta)^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V \tag{17}$$

Aufgabe H.19b ruhendes Bezugssystem

Die kinetische Energie im Ruhesystem ist einfach:

$$T = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \tag{18}$$

Die Feder hat irgendwo eine Ruhelage. Diese definieren wir als x_0. Somit ist die potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2}D\left(x - x_0\right)^2 \tag{19}$$

Mit (**??**) und (**??**) können wir die Lagrangefunktion zusammensetzen:

$$L = T - V\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}D\left(x - x_0\right)^2 \tag{20}$$

Daraus können wir den kanonischen Impuls bestimmen. Wir leiten (**??**) nach $\dot{x}$ ab:

$$p_x = m\dot{x} \tag{21}$$

Damit können wir die Hamiltonfunktion bauen:

$$\hat{H} = m\dot{x}^2 - T + V = T + V \tag{22}$$

Da die Hamiltonfunktion allerdings nicht von $\dot{x}$ abhängen darf, müssen wir noch (**??**) in (**??**) einsetzen. Wir erhalten:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{D}{2}\left(x - x_0\right)^2 \tag{23}$$

Daraus können wir nun die Bewegungsgleichungen aufstellen:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{p_x}{m} \tag{24}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Dx \tag{25}$$

Aus (**??**) können wir direkt $m\ddot{x} = -Dx$ folgern, somit erscheint die harmonische Schwingung auch tatsächlich in den Bewegungsgleichungen.

Aufgabe H.19c mitbewegtes Koordinatensystem

Wir müssen die Gleichungen aus dem aus dem ruhenden Bezugssystem transformieren. Dazu setzen wir die Transformation, die in der Aufgabenstellung gegeben ist, ein.

Somit ändert sich (**??**) zu:

$$T' = \frac{m}{2}\left(v_0 + \dot{x}'\right)^2 \tag{26}$$

Die potentielle Energie ändert sich letztlich nicht, da es ja nur um die Differenz zwischen der Auslenkung und dem Ruhepunkt geht. Somit erhalten wir:

$$V' = \frac{D}{2}\left(v_0 t + x' - v_o t - x'_0\right) = \frac{D}{2}\left(x' - x'_0\right)^2 \tag{27}$$

Aus (**??**) und (**??**) können wir analog zu (**??**) eine Lagrangefunktion zusammenbauen:

$$L' = \frac{m}{2}\left(v_0 + \dot{x}'\right)^2 - \frac{D}{2}\left(v_0 t + x' - v_o t - x'_0\right) = \frac{D}{2}\left(x' - x'_0\right)^2 \tag{28}$$

Nun bestimmen wir wieder den kanonischen Impuls (analog zu (**??**)):

$$p_{x'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m\left(v_0 + \dot{x}'\right) \tag{29}$$

Daraus bauen wir eine vorläufige Hamiltonfunktion zusammen:

$$\hat{H}' = m\left(v_0\dot{x}' + \dot{x}'^2\right) - T' + V' = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 - v_0^2\right) + V' \tag{30}$$

Dies müssen wir dann wieder transformieren, damit die Hamiltonfunktion nicht mehr von $\dot{x}'$ abhängt:

$$H' = \frac{p_{x'}^2}{2m} - v_0 p_{x'} + \frac{D}{2}\left(x' - x'_0\right)^2 \tag{31}$$

Daraus erhalten wir (analog zu (**??**)) eine Bewegungsgleichung:

$$\dot{x}' = \frac{\partial H'}{\partial p_{x'}} = \frac{p_{x'}}{m} - v_0 \tag{32}$$

Wir können auch noch die zeitliche Änderung des Impulses ausrechnen:

$$\dot{p}_{x'} = -\frac{\partial H'}{\partial x'} = -Dx' \tag{33}$$

Dies gibt die gleiche harmonische Schwingung wie (**??**).