Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 7
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

6. Juni 2012

Aufgabe	H.17
Punkte	/ 20

Aufgabe H.17 Schwerer Kreisel

Aufgabe H.17a Lagrangefunktion

Die potentielle Energie ist proportional zur Höhe des Schwerpunkts über dem Nullpunkt. Aus der Geometrie folgt direkt:

$$V = mgl\cos(\theta)$$

Die kinetische Energie setzt sich aus den einzelnen Komponenten. Dabei müssen wir die Transformationen beachten.

In der Vorlesung hatten wir die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe der Eulerwinkel ausgedrückt:

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(\theta)\sin(\psi)\dot{\phi} + \cos(\psi)\dot{\theta}\\ \sin(\theta)\cos(\psi)\dot{\phi} - \sin(\psi)\dot{\theta}\\ \cos(\theta)\dot{\phi} + \dot{\psi}\end{pmatrix} \tag{1}$$

Die kinetische Energie des Kreisels ist im raumfesten System offensichtlich:

$$T = \frac{1}{2}\left(I\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + I_3\omega_3^2\right)$$

Wir setzen nun (1) ein und erhalten nach ein wenig Umformen den gewünschten Ausdruck für die kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}I\left(\dot{\phi}^2\sin(\theta)^2 + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\phi}\cos(\theta) + \dot{\psi}\right)^2$$

Aufgabe H.17b zyklische Variablen

ψ ist zyklisch. Der entsprechende kanonische Impuls ist:

$$\pi_\psi = I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)\right)$$

ϕ ist ebenfalls zyklisch. Der entsprechende kanonische Impuls ist:

$$\pi_\phi = I_3\cos(\theta)\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta)\right) + \dot{\phi}I\sin(\theta) = \pi_\psi\cos(\theta) + \dot{\phi}I\sin(\theta)$$

Aufgabe H.17c Energie des Systems

Die Energie ist gegeben durch:

$$E = T + V = \frac{1}{2} I \left(\dot{\phi}^2 \sin(\theta)^2 + \dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right)^2 + mgl \cos(\theta)$$

Durch Einsetzen der kanonischen Impulse können wir dies ausdrücken als Funktion der nicht-zyklischen Variable und ihrer Ableitung:

$$E = T + V = \frac{1}{2} \left(\frac{(\pi_\phi - \pi_\psi \cos(\theta))^2}{I} + I\dot{\theta}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\pi_\psi^2}{I_3} + mgl \cos(\theta)$$

Aufgabe H.17d Euler-Lagrange-Gleichung

Die Euler-Lagrange-Gleichung für θ ist:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

Dabei ist die erste Ableitung:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} I \left(\dot{\phi}^2 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \right) - I_3 \left(\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi} \right) \dot{\phi} \sin(\theta) + mgl \sin(\theta)$$

Die zweite Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \ddot{\phi}$$

Zusammen und nach Ausklammern:

$$I\ddot{\theta} - \left((I - I_3) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + mgl \right) \sin(\theta) = 0$$

Aufgabe H.17e nutationsfreie Bewegung

Wenn θ konstant ist, dann sind π_ψ und π_ϕ auch konstant, sofern sich die Winkelgeschwindigkeiten (also Eigenrotation $\dot{\psi}$ und Präzessionsfrequenz $\dot{\phi}$) nicht ändern. Damit sind sie Erhaltungsgrößen.

Wenn $\dot{\theta} = 0$ ist, dann muss die große Klammer immer null sein. Wir gehen davon aus, dass $\theta = \pi$ ebenfalls ausgeschlossen ist.

$$(I - I_3) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 - I_3 \dot{\psi} \dot{\phi} + mgl = 0$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, mit folgenden Lösungen:

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi} \pm \sqrt{\left(I_3 \dot{\psi} \right)^2 - 4 (I - I_3) \cos(\theta) mgl}}{2 (I - I_3) \cos(\theta)}$$

Dabei können wir drei Fälle aufgrund des Radikants unterscheiden.

Radikant null Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$\left(I_3\dot{\psi}\right)^2 - 4\left(I - I_3\right)\cos(\theta)mgl = 0$$

Wenn der Radikant gerade null ist, dann gibt es nur exakt eine Lösung für die Präzessionsfrequenz, dies ist:

$$\dot{\phi}_0 := \frac{I_3}{I - I_3}\frac{1}{2\cos(\theta)}\dot{\psi}$$

Radikant negativ Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$\left(I_3\dot{\psi}\right)^2 - 4\left(I - I_3\right)\cos(\theta)mgl < 0$$

In diesem Fall kommt es zu keiner Präzession, da die Frequenz komplex werden müsste.

Die Gleichung können wir nach $\dot{\psi}$ umstellen und erhalten ein Kriterium:

$$\dot{\psi} < \frac{\sqrt{(I - I_3)\,4\cos(\theta)mgl}}{I_3}$$

Wenn sich der Kreisel also zu langsam dreht ($\dot{\psi}$ klein), kann es zu keiner Präzession kommen.

Radikant positiv Dies ist der Fall, wenn gilt:

$$\left(I_3\dot{\psi}\right)^2 - 4\left(I - I_3\right)\cos(\theta)mgl > 0$$

Das Kriterium dafür ist analog:

$$\dot{\psi} > \frac{\sqrt{(I - I_3)\,4\cos(\theta)mgl}}{I_3}$$

Wenn sich der Kreisel ausreichend schnell dreht ($\dot{\psi}$ groß), kann es zu zwei Präzessionsbewegungen kommen:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_0 \pm \dot{\phi}_\pm = \frac{I_3}{I - I_3}\frac{1}{2\cos(\theta)}\dot{\psi} \pm \left(\frac{I_3\dot{\psi}}{2\left(I - I_3\right)\cos(\theta)} - \frac{2\sqrt{(I - I_3)\cos(\theta)mgl}}{2\left(I - I_3\right)\cos(\theta)}\right)$$

Und noch mehr vereinfacht:

$$\dot{\phi} = 2\dot{\phi}_0 - \sqrt{\frac{mgl}{(I - I_3)\cos(\theta)}} \quad \vee \quad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{mgl}{(I - I_3)\cos(\theta)}}$$

Es kann also für den schnellen Kreisel einmal eine langsame und eine schnelle Präzession geben, deren Richtung allerdings immer die gleiche ist.

Aufgabe H.17f schneller Kreisel

Wenn $\dot{\psi}$ ausreichend groß ist, dann tritt der letzte Fall ein, dass der Radikant positiv ist. In diesem Fall besteht $\dot{\phi}$ hauptsächlich aus $\dot{\phi}_0$, die Abweichung $\dot{\phi}_\pm$ ist dann vernachlässigbar klein, da diese nicht von $\dot{\psi}$ abhängt.

Somit gilt für den schnellen Kreisel:

$$\dot{\phi} \approx \frac{I_3}{I - I_3}\frac{1}{2\cos(\theta)}\dot{\psi}$$

Wir sehen direkt, dass $\dot{\phi}$ nicht von g abhängt.

In der Vorlesung hatten wir als Nutationsfrequenz:

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\omega_3$$

Wenn wir hier (1) einsetzen, erhalten wir:

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\left(\cos(\theta)\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)$$

Wir identifizieren $-\Omega$ mit $\dot{\phi}$. Wir lösen nach $\dot{\phi}$ auf und erhalten:

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 - I}{I - I\cos(\theta) + I_3\cos(\theta)}\dot{\psi}$$