Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 7
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

23. Mai 2012

Aufgabe	H.14	H.15	H.16	Σ
Punkte	/ 4	/ 7	/ 9	/ 20

Aufgabe H.14 Eichinvarinz und Eindeutigkeit

Aufgabe H.14a Linearität in $\dot{q}$

Da die Stammfunktion von G, wir nennen sie $\mathcal{G}$, nur von q, und nicht von $\dot{q}$, abhängen darf, kann in G ein $\dot{q}$ nur durch die Kettenregel entstehen. Diese tritt allerdings immer nur einmal auf, somit ist G maximal linear in $\dot{q}$.

Aufgabe H.14b Ableitungen

Die totale zeitliche Ableitung von $\mathcal{G}$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{G}(q,t) &= \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} \\ &= A\dot{q} + B\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t \partial q}$$

Und:

$$\frac{\partial B}{\partial q} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial q \partial t}$$

Da wir Physiker sind, ist $\mathcal{G}$ derart differenzierbar, dass die partiellen Ableitungen vertauscht werden können. Somit gilt:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t \partial q} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial q \partial t} = \frac{\partial B}{\partial q}$$

Aufgabe H.15 Streuproblem

Aufgabe H.15a Zusammenhang zwischen b und θ

Der Steigungswinkel ϕ der Tangente ist:

$$\phi := \arctan\left(y'(x_0)\right)$$

Aus der Geometrie können wir ablesen, dass der Streuwinkel θ das zweifache der Steigungswinkel der Tangente an den Körper ist:

$$\theta = 2\phi$$

Wenn ein Stoßparameter b gegeben ist, können wir daraus das x_0 bestimmen, wo der Körper getroffen wird:

$$x_0 = \arcsin(b)$$

Diese Gleichungen kombinieren wir:

$$\theta = 2\arctan\left(\cos(\arcsin(b))\right)$$

Dies stellen wir nach b um und erhalten sofort:

$$b = \sqrt{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \tag{1}$$

Dabei verwerfe ich die negative Lösung zu dieser Gleichung, da ich nur $b \geq 0$ betrachte.

Alternativ ginge auch noch:

$$b = \sin\left(\arccos\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right)$$

Aufgabe H.15b differentieller Wirkungsquerschnitt

Die Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ist:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin(\theta)}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right|$$

Den ersten Bruch können wir bestimmen, indem wir einfach (1) einsetzen. Den zweiten Bruch bestimmen wir, indem wir (1) nach θ ableiten. Wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\sqrt{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^3}}{\sin(\theta)}\left|-\frac{\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sqrt{1-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}\right|$$

Die Betragsstriche lassen wir fallen, damit wir kürzen können. Dies geht, weil die Wurzel nie negativ wird, $\sec^2$ nie negativ wird und tan auch nie negativ wird. Wir erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^3\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}$$

Dies ist dann komplett vereinfacht:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^4}{2} \tag{2}$$

Aufgabe H.15c Winkelbereich

In Abbildung 1 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gegen θ geplottet.

Dabei wird das Teilchen in den kompletten Winkelbereich $[0, \pi]$ gestreut.

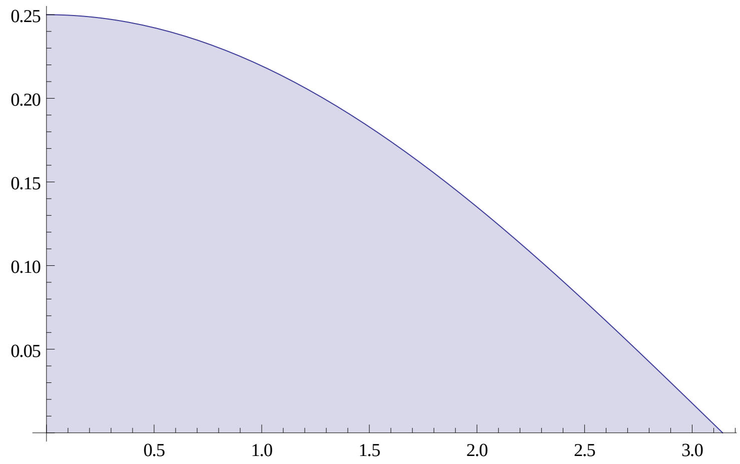

Abbildung 1: Wirkungsquerschnitt gegen Steuwinkel

Aufgabe H.15d totaler Wirkungsquerschnitt

Für den totalen Querschnitt integrieren wir über den kompletten Raumwinkel:

$$\sigma_{\text{total}} = \int_\Omega \frac{1}{4} \sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \, \mathrm{d}\Omega$$

Die können wir in ein Integral über eine Kugelfläche umwandeln, die in Kugelkoordinaten durch α (Azimuth) und θ (Elevation) parametrisiert ist:

$$\sigma_{\text{total}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin(\theta) \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\theta$$

Dies ist ein uneigentliches Integral, daher müssen wir schreiben:

$$\sigma_{\text{total}} = \lim_{\xi \to \pi} \frac{1}{2}\pi \int_0^\xi \sec\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

Mit der Formel für Kosinuspotenzen und der Doppelwinkelformel erhalten wir als Lösung für das Integral:

$$\sigma_{\text{total}} = \lim_{\xi \to \pi} \frac{1}{2}\pi \left(-2\frac{4}{1+\cos(\xi)}\right)$$

$\cos(\pi)$ ist gerade -1. Somit konvergiert der Nenner gegen 0 und der ganze Ausdruck somit gegen ∞. Der totale Wirkungsquerschnitt ist also unendlich groß.

Aufgabe H.16 Trägheitsmomente

Aufgabe H.16a Molekül

Der Schwerpunkt liegt von m_1 aus gesehen:

$$s := l\frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Das Trägheitsmoment um eine Achse senkrecht zur Verbindungslinie durch den Schwerpunkt ist schlicht die Summe der beiden Massen:

$$I_x = I_z = m_1 s^2 + m_2(l-s)^2$$

Um die Verbindungslinie ist das Trägheitsmoment null:

$$I_y = 0$$

Aufgabe H.16b Kegel

Gegeben ist ein Kegel mit Radius R und Höhe h.

Zuerst einige grundlegende Beobachtungen. Von der Spitze aus gesehen ist der Radius des Zylinders:

$$r(H) = R\frac{H}{h}$$

Außerdem ist die Dichte des Zylinders gegeben durch:

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}V\frac{3M}{\pi R^2 h}$$

Aufgabe H.16b.1 Symmetrieachse

Das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse ist:

$$\begin{aligned} I_h &= \rho \int_V r_\perp^2 \,\mathrm{d}V \\ &= 2\rho\pi \int_0^h \int_0^{H\frac{R}{h}} r^2 r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}H \end{aligned}$$

Das Integral ist trivial, wir setzen die Dichte ein und erhalten:

$$= \frac{3}{10}MR^2$$

Aufgabe H.16b.2 die anderen Achsen

Wir betrachten den Kegel nur in einem kartesischen Koordinatensystem mit x, y und H als Koordinaten.

Für das Integral müssen wir $r_\perp^2$ darstellen. Wir betrachten die Rotation um die x-Achse an der Spitze des Kegels. Somit bleibt:

$$r_\perp^2 = H^2 + y^2$$

Aus der Geometrie ist anschaulich, wie in die Integralgrenzen sein müssen.

$$\begin{aligned} I_x &= \rho \int_0^h \int_{-\frac{H}{h}R}^{\frac{H}{h}R} \int_{-R\sqrt{1-\frac{H^2}{h^2}}}^{R\sqrt{1-\frac{H^2}{h^2}}} H^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}H \\ &= \frac{2}{15\pi}M(3h^2 + R^2) \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt des Kegels liegt, von der Spitze gesehen, bei $\frac{3}{4}h$. [1] Mit dem Steinerschen Satz

[1] Es ist leicht einzusehen, dass sich der Schwerpunkt des Kegels nicht ändert, wenn man die Grundfläche vom Kreis auf ein gleichseitiges Dreieck mit gleicher Fläche umformt. Somit wird aus dem Kegel eine Pyramide. Außerdem wird sich die relative Lage des Schwerpunkts nicht ändern, wenn man die Höhe staucht oder dehnt. Die Höhe sei nun so gewählt, dass sich ein Tetraeder ergibt. Durch die Symmetrie ist es möglich, die homogen verteilte Masse in den Eckpunkte zu versammeln, ohne dass sich der Schwerpunkt, der offensichtlich in der Mitte liegen muss, zu verschieben. Der Schwerpunkt ist jetzt einfach nur der Mittelwert der vier Eckpunkte. Da drei Punkte unten liegen und einer in der Höhe h, muss der Schwerpunkt auf $\frac{1}{4}$ der Höhe von unten aus gesehen liegen.

müssen wir nun noch dieses Trägheitsmoment in den Schwerpunkt rücken. Dabei gilt:

$$I_s = I_x - M\left(\frac{3}{4}h\right)^2$$

Somit ist das Trägheitsmoment um die x-Achse (und um jede andere Achse, die senkrecht zur h-Achse steht, im Schwerpunkt:

$$I_s = -\frac{9h^2M}{16} + \frac{8M(3h^2+R^2)}{15\pi} \tag{3}$$

Aufgabe H.16c Ellipsoid

Der Schwerpunkt des Ellipsoids liegt offensichtlich in dessen Mittelpunkt. Die Dichte bezeichnen wir mit ρ. Wir integrieren wie schon beim Kegel von der x-Achse zu allen Punkten um über $r_\perp^2$ zu integrieren.

Zur Übersicht definieren wir die Integralgrenzen vorher. Diese ergeben sich, indem wir die Ellipsoidgleichung nach einer Variablen umstellen und alle inneren[2] Variablen auf null setzen.

$$\begin{aligned} x_{\max} &= a \\ y_{\max} &= \frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a} \\ z_{\max} &= \frac{c\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}{ab} \end{aligned}$$

Um die x-Achse ist das Trägheitsmoment gegeben durch:

$$\begin{aligned} I_x &= \rho \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} \int_{-y_{\max}}^{y_{\max}} \int_{-z_{\max}}^{z_{\max}} y^2 + z^2 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \rho\frac{4abc\left(b^2+c^2\right)\pi}{15} \end{aligned}$$

Analog um die y- und z-Achse:

$$\begin{aligned} I_y &= \rho\frac{4abc\left(a^2+c^2\right)\pi}{15} \\ I_z &= \rho\frac{4abc\left(a^2+b^2\right)\pi}{15} \end{aligned}$$

Aufgabe H.16d Kreiskegelstrumpf

Aufgabe H.16d.1 Symmetrieachse

Für das Trägheitsmoment um die Symmetrieachse ist es erstmal egal, wo der Schwerpunkt liegt. Wir können uns den Kreiskegelstrumpf als Differenz von zwei Kreiskegeln vorstellen. Dabei ist die Masse M des Kreiskegelstrumpfs aufzuteilen.

Aus dem Strahlensatz folgt, dass für die Höhen des vollständigen (h_2, r_2) und des zu subtrahierenden Kegels (h_1, r_1) gelten muss:

$$\frac{h_2}{r_2} = \frac{h_1}{r_1} \quad \vee \quad h_1 - h_2 = h$$

[2] Für x sind dies y und z, für y ist es z. Für z keine.

Daraus erhalten wir die benötigten Höhen:

$$h_1 := -\frac{hr_1}{r_1 - r_2} \quad \vee \quad h_2 := h - \frac{hr_1}{r_1 - r_2}$$

Alle Kegel müssen die gleiche Dichte haben. Somit ergibt sich aus dem Volumen jeweils ihre Masse. Die Dichte ist schlicht die Masse durch das Volumen des Stumpfs:

$$\rho := \frac{3M}{h\pi r_1^2 + h\pi r_1 r_2 + h\pi r_2^2}$$

Die Masse der Teilkegel ist dann gegeben durch:

$$m_1 := -\frac{Mr_1^3}{r_1^3 - r_2^3}$$

$$m_2 := \frac{Mr_2^3}{-r_1^3 + r_2^3}$$

Die Differenz dieser Massen ist gerade M.

Mit dem Ergebnis aus Aufgabe H.16b.1 erhalten wir:

$$I_h = \frac{3}{10} M \frac{r_1^4 + r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2^3 + r_2^4}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

Für den Fall, dass $r_1 \to r_2$, also einem Zylinder, erhalten wir:

$$I_h = \frac{1}{2} M r_2^2$$

Und für den Fall, dass $r_1 \to 0$, also einen reinen Kreiskegel, erhalten wir das bereits bekannte Ergebnis aus Aufgabe H.16b.1:

$$I_h = \frac{3}{10} M r_2^2$$

Aufgabe H.16d.2 die anderen Achsen

Zuerst berechnen wir den die Höhe h_s, in der der Schwerpunkt liegt:

Der Schwerpunkt ist definiert als:

$$\vec{s} = \frac{1}{M} \rho \iiint_V r \, \mathrm{d}V$$

Dieses Integral können wir in Zylinderkoordinaten lösen. Dabei interessiert uns nur die Höhe. Das r kommt durch die Zahl der Zylinderkoordinaten.

$$h_s := \frac{1}{M} \rho \int_0^h \int_0^{r_1 + \frac{r_2 - r_1}{h} h'} \int_0^{2\Pi} h' r \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}h'$$

Wir erhalten sofort:

$$h_s := \frac{h\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)}{4\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)} \tag{4}$$

Wir hatten mit (3) bereits eine Formel für einen Kegel, der um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse in seinem Schwerpunkt rotiert, hergeleitet. Den Kegelstumpf können wir im Prinzip wieder als Differenz von zwei Kegeln auffassen. Das Trägheitsmoment der beiden einzelnen Kegel können wir mit (3) bestimmen und mit dem steinerschen Satz so verschieben, dass die sich um den Schwerpunkt des Kegelstumpfs drehen. Die Differenz der verschobenen Trägheitsmomente ist das hier gesuchte Trägheitsmoment des Kegelstumpfs.

Wir beginnen mit dem Trägheitsmoment des kleinen Kegels, I_1:

$$I_1 = \frac{Mr_1^2\left(h^2(384-135\pi)+128(r_1-r_2)^2\right)}{240\pi(r_1-r_2)^2}$$

Der Schwerpunkt dieses Kegels liegt, von unten aus gesehen auf $\frac{1}{4}h_1$. Der Schwerpunkt des Kegelstumpfs (von unten) hatten wir in (4) hergeleitet. Wir müssen also um

$$\left(\frac{1}{4}h_1\right) + (h_2 - h_s)$$

verschieben, damit der Kegel sich um die Schwerpunktsachse des Kegelstumpf rotiert. Die Masse des ersten Kegels war gerade m_1. Wir erhalten also aus dem steinerschen Satz:

$$I_1' := \frac{8M\left(r_1^2+\frac{3h^2r_1^2}{(r_1-r_2)^2}\right)}{15\pi} - \frac{9h^2Mr_1^2}{16(r_1-r_2)^2} - \frac{hM\pi r_1^3\left(h-\frac{5hr_1}{4(r_1-r_2)}-\frac{h^2\pi\left(r_1^2+2r_1r_2+3r_2^2\right)}{12\left(\frac{h\pi r_1^3}{3(r_1-r_2)}+\frac{1}{3}\pi\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)r_2^2\right)}\right)^2}{3(r_1-r_2)\left(\frac{h\pi r_1^3}{3(r_1-r_2)}+\frac{1}{3}\pi\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)r_2^2\right)}$$

Und für den großen Kegel erhalten wir:

$$I_2 = \frac{M\left(h^2(384-135\pi)+128(r_1-r_2)^2\right)r_2^2}{240\pi(r_1-r_2)^2}$$

Den zweiten Kegel müssen wir auch noch verschieben, damit er sich um die Schwerpunktsachse des Kegelstumpfs dreht. Diesmal müssen wir um

$$h_s - \frac{1}{4}h_2$$

verschieben. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} I_2' := &-\frac{9}{16}M\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)^2 + \frac{8M\left(3\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)^2+r_2^2\right)}{15\pi} \\ &+ \frac{M\pi\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)r_2^2\left(-\frac{1}{4}+\frac{h^2\pi\left(r_1^2+2r_1r_2+3r_2^2\right)}{12\left(\frac{h\pi r_1^3}{3(r_1-r_2)}+\frac{1}{3}\pi\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)r_2^2\right)}\right)^2}{3\left(\frac{h\pi r_1^3}{3(r_1-r_2)}+\frac{1}{3}\pi\left(h-\frac{hr_1}{r_1-r_2}\right)r_2^2\right)} \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden ist dann das gesuchte Trägheitsmoment um eine Achse, die senkrecht zur Höhe steht und durch den Schwerpunkt geht:

$$I = I_2' - I_1' = \frac{M\left(3h^2(-128+45\pi)-128(r_1-r_2)^2\right)(r_1+r_2)}{240\pi(r_1-r_2)}$$