Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221Übung 5
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

9. Mai 2012

Aufgabe	H.9	H.10	H.11	Σ
Punkte	/ 8	/ 6	/ 6	/ 20

Aufgabe H.9 Tischplatte

Zwei Massen sind mit einer Schnur durch eine Tischplatte verbunden, wie in Abbildung 1 gezeigt.

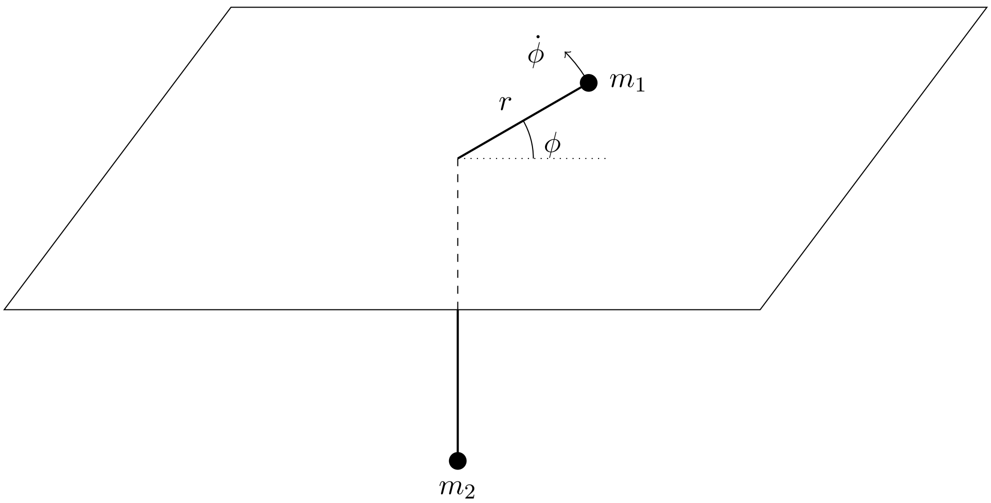

Abbildung 1: Skizze für den Aufbau

Aufgabe H.9a Lagrangegleichungen

Wir sollen die Lagrangegleichungen für dieses Problem aufstellen.

Die beiden Freiheitsgrade dieses Problem sind einmal der Radius r, den die Masse m_1 vom Loch entfernt ist. Dazu kommt noch der Winkel ϕ. Es existieren entsprechende Zwangsbedingungen, allerdings sind diese für die Lagrangefunktion nicht direkt notwendig.

Die kinetische Energie ist gegeben durch:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2$$

Die potentielle Energie hängt nur von der zweiten Masse ab. Den Nullpunkt setzen wir so, dass für $r = 0$ gilt: $V = 0$. Somit ist die potentielle Energie:

$$V = m_2 g r$$

Zusammen also:

$$\begin{aligned}
L &= T - V \\
L &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}^2 - m_2 g r \\
L &= \frac{1}{2} \left((m_1 + m_2) \dot{r}^2 + m_1 r^2 \dot{\phi}^2 \right) - m_2 g r
\end{aligned}$$

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= 0 & \frac{\partial L}{\partial r} &= m_1 r \dot{\phi}^2 - m_2 g \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m_1 r^2 \dot{\phi} & \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= (m_1 + m_2) \dot{r} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= m_1 r (2 \dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= (m_1 + m_2) \ddot{r}
\end{aligned}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten also:

$$m_1 r (2 \dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) = 0$$

$$(m_1 r \dot{\phi}^2 - m_2 g) - (m_1 + m_2) \ddot{r} = 0$$

Außerdem wissen wir nun, dass ϕ zyklisch ist und der kanonische Impuls

$$\pi_\phi = m_1 r^2 \dot{\phi}$$

erhalten bleibt. Dies ist der Drehimpuls.

Aufgabe H.9b Differentialgleichung erster Ordnung

Hier fehlen noch Inhalte.

Aufgabe H.9c Gleichgewichtslage

Falls sich m_1 auf einer Kreisbahn bewegt, ist $\dot{r} = 0$. Daraus folgt direkt, dass $\ddot{r} = 0$ sein muss. Somit können wir die erste Lagrangegleichung vereinfachen zu:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{m_2 g}{m_1 r}$$

Dort setzen wir den Drehimpuls ein und erhalten:

$$\pi_\phi^2 = m_1 m_2 r g$$

Die Gleichgewichtslage sieht so aus, dass die Schwerkraft auf m_2 gerade die benötigte Zentripetalkraft für m_1 ist. Alternativ kann man es im rotierenden Bezugssystem so interpretieren, dass sich Seilkraft und Zentrifugalkraft gerade aufheben.

Aufgabe H.9d ohne Lagrangeformalismus

Diesen Ansatz können wir auch ohne Lagrangeformalismus benutzen und erhalten:

$$m_1 \frac{(r\dot{\phi})^2}{r} = m_2 g$$
$$m_1 r \dot{\phi}^2 = m_2 g$$

Diese Formel hatten wir bereits oben, somit führt sie auf das gleiche Endergebnis.

Aufgabe H.10 Schraubenlinie

Gegeben ist ein Draht in Form einer Schraubenlinie mit Ganghöhe a und Radius R. Eine Perle rutscht diesem Draht im homogenen Gravitationspotential nach unten.

Aufgabe H.10a Euler-Lagrange-Gleichungen

Als Koordinate benutzen wir ϕ. Es ist fast wie bei den regulären Zylinderkoordinaten definiert, allerdings nimmt es Werte aus ganz $\mathbb{R}$ an und nicht nur aus $[0, 2\pi)$. Es ist eine Art Parametrisierung über die Bogenlänge des Drahtes, nur eben auf eine z-Ebene projiziert.

Die beiden anderen Koordinaten aus dem Zylindersystem können wir schreiben:

$$r = R$$
$$z = -\frac{\phi}{2\pi} a$$

Dabei stellen wir uns $\frac{\phi}{2\pi}$ als die Anzahl Umrundungen vor, die die Perle bereits vollzogen hat.

Als Euler-Lagrange-Gleichung erhalten wir in Zylinderkoordinaten:

$$L = \frac{m}{2} \left(R^2 \dot{\phi}^2 + \left(\frac{\dot{\phi}}{2\pi} a \right)^2 \right) + mg \frac{\phi}{2\pi} a$$

Wir bestimmen die Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m \frac{ag}{2\pi}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\dot{\phi} \left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} \right)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m\ddot{\phi} \left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} \right)$$

Zusammen erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$m \frac{ag}{2\pi} - m\ddot{\phi} \left(R^2 + \frac{a^2}{4\pi^2} \right) = 0$$

Daraus folgt direkt:

$$\ddot{\phi} = \frac{4ag\pi}{4\pi^2 R^2 + a^2}$$

Aufgabe H.10b Bewegungsgleichung lösen

Wir integrieren von 0 bis t und erhalten als Bewegungsgleichung:

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\ddot{\phi}t^2$$

Und nach der Definition von z ist dies auch:

$$z(t) = -\frac{\ddot{\phi}}{4\pi}at^2$$

Und vereinfacht:

$$z(t) = -\frac{a^2 g}{m(4\pi^2 R^2 + a^2)}t^2$$

Aufgabe H.11 rotierender Draht

In Abbildung 2 haben wir gezeichnet, wie wir den Winkel interpretieren.

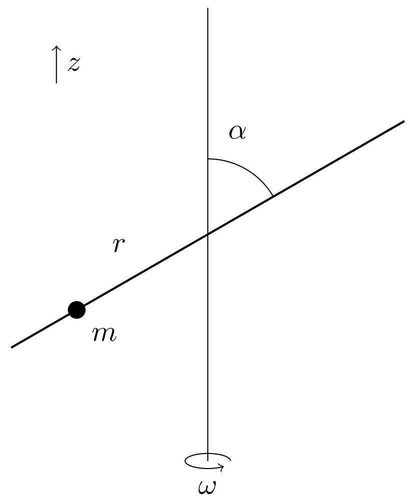

Abbildung 2: Skizze für den Aufbau

Aufgabe H.11a Euler-Lagrange-Gleichung

Als Koordinaten wählen wir den Radius r, den die Kugel vom Zentrum entfernt ist. Diese Größe hat ein Vorzeichen, enthält also, ob die Perle auf der einen oder anderen Seite ist. Als Höhe z erhalten wir aus der Trigonometrie:

$$z = r\cos(\alpha)$$

Die kinetische Energie in Zylinderkoordinaten ist wie immer:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin(\alpha)^2\dot{\phi}^2\right)$$

Die potentielle Energie ist:

$$V = mgz = mgr\cos(\alpha)$$

Zusammen in einer Lagrangegleichung:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin(\alpha)^2\omega^2\right) - mgr\cos(\alpha)$$

Diese leiten wir wieder ab.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial r} &= mr\sin(\alpha)^2\omega^2 - mg\cos(\alpha)\\ \frac{\partial L}{\partial \dot r} &= m\dot r\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot r} &= m\ddot r\end{aligned}$$

Dies fügen wir zu einer Euler-Lagrange-Gleichung zusammen:

$$m\left(r\sin(\alpha)^2\omega^2 - g\cos(\alpha) - \ddot r\right) = 0$$

Aufgabe H.11b Bewegungsgleichungen

Zuerst setzen wir z für r ein. Danach formen wir um.

$$m\left(z\sec(\alpha)\sin(\alpha)^2\omega^2 - g\cos(\alpha) - \ddot z\sec(\alpha)\right) = 0$$

Wir kürzen die Masse. Außerdem multiplizieren wir mit $\cos(\alpha)$.

$$z\sin(\alpha)^2\omega^2 - g\cos(\alpha)^2 - \ddot z = 0$$

$$z\sin(\alpha)^2\omega^2 - \ddot z = g\cos(\alpha)^2$$

Der homogene Teil wird gelöst durch den Ansatz:

$$z(t) = \exp(\omega t\sin(\alpha))$$

$$\ddot z(t) = \omega^2\sin(\alpha)^2\exp(\omega t\sin(\alpha))$$

Eine inhomogene Lösung erhalten wir mit:

$$z(t) = C$$

Wenn wir die Konstante C so wählen, dass $C\omega^2\sin(\alpha)^2 = g\cos(\alpha)^2$, dann können wir damit auch die inhomogene Differentialgleichung lösen.

Somit lautet die allgemeine Lösung, zusammengesetzt aus a-mal der homogenen Lösung und einmal der partikulären Lösung:

$$z(t) = a\exp(\omega t\sin(\alpha)) + \frac{g}{\omega^2}\cot(\alpha)^2$$

Mit der Anfangsbedingung $z_0 = z(0)$ können wir die Konstante a bestimmen. Es muss also gelten:

$$z_0 - \frac{g}{\omega^2}\cot(\alpha)^2 = a$$

Für den Fall $a = 0$ erhalten wir eine stationäre Lösung. In diesem Punkt gleichen sich Schwerkraft und Zentrifugalkraft gerade aus.