Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221Übung 4
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

1. Mai 2012

Aufgabe H.7 Keplerproblem

Aufgabe H.7a Lagrangegleichung in Zylinerkoordinaten

Generell sieht die Lagrangefunktion so aus:

$$L = T - V$$

Zusammen also:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r}$$

Aufgabe H.7b zyklische Koordinaten

Ich bestimme die Ableitung der Lagrangefunktion nach den verschiedenen Korrdinaten.

Nach den Korrdinaten:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\alpha}{r^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

Nach den Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

Und noch nach der Zeit:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi}$$

Da $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$, ist ϕ zyklisch. Außerdem ist $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$ eine Erhaltungsgröße. Dies ist der Drehimpuls.

Aufgabe H.7c Euler-Lagrange-Gleichungen

Für r:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha}{r^2} = 0$$

Für ϕ:

$$mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi} = 0$$

Aufgabe H.8 Perle

Die Parabel sei mit einem Parameter a gegeben:

$$z(r) = ar^2$$

Die Schwerkraft ist gegeben durch:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Aufgabe H.8a Zwangsbedingungen

Die erste Zwangsbedingung besagt, dass die Höhe entsprechend dem Radius sein muss:

$$z = ar^2 = a(x^2 + y^2)$$

Der Winkel ϕ muss mit der aktuellen Position des Drahtes übereinstimmen, es muss also gelten:

$$\phi = \omega t$$

Das ganze soll allerdings in kartesichen Koordinaten ausgedrückt werden. Als unabhängige Variable wählen wir z.

Für x und y muss gelten:

$$x = r\cos(\omega t)$$

$$y = r\sin(\omega t)$$

Wir lösen noch z nach r auf um r zu eleminieren. Somit erhalten wir für r:

$$r = \sqrt{\frac{z}{a}}$$

Die beiden holonomen Zwangbedingungen lauten also:

$$x - \sqrt{\frac{z}{a}}\cos(\omega t) = 0$$

$$y - \sqrt{\frac{z}{a}}\sin(\omega t) = 0$$

Aufgabe H.8b Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten mit der unabhängigen Variable r erhalten wir:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ ar^2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen die Ableitung des Ortsvektors:

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}\cos(\omega t) - r\sin(\omega t)\omega \\ \dot{r}\sin(\omega t) + r\cos(\omega t)\omega \\ 2ar\dot{r} \end{pmatrix}$$

Und noch die zweite Ableitung:

$$\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r} \\ \sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r} \\ 2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) \end{pmatrix}$$

Somit erhalten wir für die Zwangskraft:

$$Z_x = m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r})$$

$$Z_y = m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r})$$

Bei der dritten Komponente müssen wir noch die Schwerkraft abziehen, sie also letztlich addieren:

$$Z_z = m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)$$

Aufgabe H.8c erste Zwangskraft

Aufgabe H.8c.1 erste Relation

Z_1 liegt in der Ebene, in der auch die Parabel liegt. Dies bedeutet für die radiale Komponente Z_{1_r}, dass man sie in x und y Komponente aufspalten kann, in dem man den Kosinus und Sinus verwendet:

$$Z_{1_r}\cos(\omega t) = Z_{1_x}$$

$$Z_{1_r}\sin(\omega t) = Z_{1_y}$$

Teilt man jeweils durch die trigonometrische Funktion und setzt die beiden Gleichungen über Z_{1_r} gleich, erhält man fast den gesuchten Ausdruck:

$$Z_{1_x}\sec(\omega t) = Z_{1_y}\csc(\omega t)$$

Wir bringen die trigonometrischen Funktionen noch jeweils auf die andere Seite. Nun erhalten wir:

$$Z_{1_r} = Z_{1_x}\sin(\omega t) = Z_{1_y}\cos(\omega t)$$

Aufgabe H.8c.2 zweite Relation

Für die zweite Relation betrachten wir einen Schnitt, so dass die Parabel in der r-z-Ebene liegt. Die Tangente an diese Parabel hat die Steigung $z'(r)$, der entsprechende Winkel ist $\tan(\beta)$.

Die Zwangskraft Z_1, die senkrecht auf diese Tangente stehen muss, können wir in eine radiale und eine senkrechte Komponente aufteilen. Aus der Geometrie folgt, dass die Steigung umgekehrt sein muss:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \frac{Z_{1_r}}{Z_{1_z}}$$

Wir können die radiale Komponente auch noch in x und y aufteilen und erhalten somit den gewünschten Ausdruck:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = 2ar = \frac{\sqrt{Z_{1_x}^2 + Z_{1_y}^2}}{Z_{1_z}}$$

Aufgabe H.8c.3 Eliminierung

Bisher haben wir folgende Gleichungen gesammelt:

$$Z_x = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$
$$Z_y = Z_{1_y} + Z_{2_y}$$
$$Z_z = Z_{1_z} + Z_{2_z}$$
$$Z_x = m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r})$$
$$Z_y = m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r})$$
$$Z_z = m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)$$
$$Z_{1_x}\sin(\omega t) = Z_{1_y}\cos(\omega t)$$
$$2ar = \frac{\sqrt{Z_{1_x}^2 + Z_{1_y}^2}}{Z_{1_z}}$$

Dabei können wir umstellen und erhalten:

$$Z_{1_x}\tan(\omega t) = Z_{1_y}$$

Wir substituieren in die ersten drei Gleichungen:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$
$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) + Z_{2_y}$$
$$m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g) = \frac{\sqrt{Z_{1_x}^2 + (Z_{1_x}\tan(\omega t))^2}}{2ar} + Z_{2_z}$$

Somit wäre Z_{1_y} und Z_{1_z} eliminiert, wie in der Teilaufgabe gefordert. Wir vereinfachen noch ein wenig und erhalten:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$
$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) + Z_{2_y}$$
$$m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g) = \frac{\sqrt{Z_{1_x}^2(1 + \tan(\omega t)^2)}}{2ar} + Z_{2_z}$$

Das $1 + \tan(\omega t)^2$ können wir zu $\sec(\omega t)^2$ zusammenfassen und die Wurzel ziehen:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$

$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) + Z_{2_y}$$

$$m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g) = \frac{Z_{1_x}\sec(\omega t)}{2ar} + Z_{2_z}$$

Aufgabe H.8d zweite Zwangskraft

Aufgabe H.8d.1 zweite Relation

Diese Zwangskraft sorgt nur für die Rotation in der x-y-Ebene und hat daher keine Komponente in die z-Richtung. Somit folgt direkt:

$$Z_{2_z} = 0$$

Aufgabe H.8d.2 erste Relation

Der Winkel dieser Kraft muss um $\pm\frac{\pi}{2}$ gegenüber ωt verschoben sein, damit sie immer senkrecht angreift. Somit muss also gelten:

$$Z_2 = Z_{2_x}\sec\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = Z_{2_y}\csc\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Wir multiplizieren mit den trigonometrischen Funktionen über Kreuz, um sie aus dem Nenner zu bekommen:

$$Z_{2_x}\sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = Z_{2_y}\cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Verschiebt man den Sinus um $\frac{\pi}{2}$, so wird er zum negativen Kosinus, der Kosinus zum Sinus. Somit erhalten wir:

$$Z_{2_x}\cos(\omega t) = -Z_{2_y}\sin(\omega t)$$

Aufgabe H.8d.3 Eliminierung

In diesem Abschnitt haben wir neue Gleichungen aufgestellt. Zusammen sind diese:

$$Z_{2_z} = 0$$

$$Z_{2_y} = -Z_{2_x}\cot(\omega t)$$

Wir wiederholen die drei Gleichungen, die wir in Aufgabe H.8c.3 erarbeitet haben.

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$

$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) + Z_{2_y}$$

$$m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g) = \frac{Z_{1_x}\sec(\omega t)}{2ar} + Z_{2_z}$$

Nun können wir, wie in der Aufgabenstellung gefordert, noch Z_{2_y} und Z_{2_z} eliminieren, in dem wir einsetzen:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$

$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) - Z_{2_x}\cot(\omega t)$$

$$m(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g) = \frac{Z_{1_x}\sec(\omega t)}{2ar}$$

Die letzte Gleichung können wir noch ohne Brüche schreiben:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x} + Z_{2_x}$$
$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = Z_{1_x}\tan(\omega t) - Z_{2_x}\cot(\omega t)$$
$$2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t) = Z_{1_x}$$

Aufgabe H.8e Bewegungsgleichung

Aufgabe H.8e.1 Eliminierung

Wir setzen nun die dritte Gleichung in die erste und zweite Gleichung ein:

$$m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) = 2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t) + Z_{2_x}$$
$$m(\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}) = 2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t)\tan(\omega t) - Z_{2_x}\cot(\omega t)$$

Kosinus und Tangens ist Sinus.

$$m\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} = 2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\sin(\omega t) - Z_{2_x}\cot(\omega t)$$

Wir bringen alle Terme auf eine Seite.

$$m\sin(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} - 2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\sin(\omega t) + Z_{2_x}\cot(\omega t) = 0$$

Wir klammern den Sinus aus.

$$m\sin(\omega t)[(\ddot{r} - r\omega^2) - 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} + Z_{2_x}\cot(\omega t) = 0$$
$$m\sin(\omega t)[\ddot{r} - r\omega^2 - 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} + Z_{2_x}\cot(\omega t) = 0$$
$$m\sin(\omega t)[\ddot{r} - r\omega^2 - 4a^2r\dot{r}^2 - 4a^2r^2\ddot{r} - 2arg] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} + Z_{2_x}\cot(\omega t) = 0$$
$$m\sin(\omega t)[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r} + Z_{2_x}\cot(\omega t) = 0$$

Wir lösen nach Z_{2_x} auf.

$$-\left(m\sin(\omega t)[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r}\right)\tan(\omega t) = Z_{2_x}$$

Dies setzen wir in die erste Gleichung ein:

$$\begin{aligned} m(\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r}) &= 2arm(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t) \\ &\quad - \left(m\sin(\omega t)[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] + m\cos(\omega t)2\omega\dot{r}\right)\tan(\omega t) \end{aligned}$$

Dann kürzen wir die Massen.

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r} &= 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t) \\ &\quad - \left(\sin(\omega t)[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] + \cos(\omega t)2\omega\dot{r}\right)\tan(\omega t) \end{aligned}$$

Den Tangens ziehen wir in die Klammer hinein.

$$\begin{aligned} \cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r} &= 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t) \\ &\quad - \frac{\sin(\omega t)^2}{\cos(\omega t)}[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] - \sin(\omega t)2\omega\dot{r} \end{aligned}$$

Anschließend ziehen wir alles auf eine Seite.

$$\begin{aligned}\cos(\omega t)(\ddot{r} - r\omega^2) - \sin(\omega t)2\omega\dot{r} - 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\cos(\omega t)\\ + \frac{\sin(\omega t)^2}{\cos(\omega t)}[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)] + \sin(\omega t)2\omega\dot{r} = 0\end{aligned}$$

Wir faktorisieren nach Sinus und Kosinus.

$$\begin{aligned}&\cos(\omega t)\left(\ddot{r} - r\omega^2 - 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\right)\\ &+ \sin(\omega t)\left(-2\omega\dot{r} + 2\omega\dot{r} + \tan(\omega t)[\ddot{r}(1 - 4a^2r^2) - r(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2)]\right) = 0\end{aligned}$$

Das $-2\omega\dot{r} + 2\omega\dot{r}$ hebt sich gerade auf.

$$\begin{aligned}&\cos(\omega t)\left(\ddot{r} - r\omega^2 - 2ar(2a(\dot{r}^2 + r\ddot{r}) + g)\right)\\ &+ \sin(\omega t)\tan(\omega t)\left[\ddot{r}\left(1 - 4a^2r^2\right) - r\left(\omega^2 + 2ag + 4a^2\dot{r}^2\right)\right] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos(\omega t)\left(\ddot{r} - r\omega^2 - 4a^2r\dot{r}^2 - 4a^2r^2\ddot{r} - 2arg\right)\\ &+ \sin(\omega t)\tan(\omega t)\left(\ddot{r} - 4a^2r^2\ddot{r} - \omega^2r - 2arg - 4a^2r\dot{r}^2\right) = 0\end{aligned}$$

Die große Klammer können wir nun ausklammern:

$$\left(\ddot{r} - r\omega^2 - 4a^2r\dot{r}^2 - 4a^2r^2\ddot{r} - 2arg\right)\left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\tan(\omega t)\right) = 0$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn die große Klammer Null ist. Somit folgt:

$$\ddot{r} - 4a^2r^2\ddot{r} - r\omega^2 - 2arg - 4a^2r\dot{r}^2 = 0$$

Das ist nicht das gewünschte Ergebniss, aber der Fehler ist gering. Es liegt also noch ein kleiner Rechenfehler vor, ohne den man die gewünschte Bewegungsgleichung

$$\left(1 + 4a^2r^2\right)\ddot{r} + 4a^2r\dot{r}^2 + \left(2ag - \omega^2\right)r = 0$$

erhalten würde.

Aufgabe H.8e.2 Parameter a

Das a ist das gleiche a, das wir zu Beginn eingeführt haben. Es ist der Parameter für die Parabel.

Aufgabe H.8e.3 stationäre Lösung

Damit die Perle immer an der gleichen Stelle bleibt, muss $\dot{r} = 0$ sein. Daraus folgt auch, dass $\ddot{r} = 0$ sein muss. Somit bleibt von der Bewegungsgleichung nur noch übrig:

$$(2ag - \omega^2)r = 0$$

Daraus folgt, dass die Perle entweder im Ursprung $r = 0$ sitzen muss (dann wirkt keine Zentrifugalkraft). In diesem Fall ist die Winkelgeschwindigkeit beliebig.

Alternativ muss die Klammer Null werden. Dies bedeutet, dass:

$$\omega = \sqrt{2ag}$$

Dies ist die kritische Winkelgeschwindigkeit, für die die Perle an einer festen Stelle bleibt.