Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 3
Gruppe 11
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Thore Daunicht

Christoph Hansen

25. April 2012

Aufgabe H.5 Keplerproblem

Aufgabe H.5a Bahnkurven

Für ein attraktives Potential gilt:

$$\kappa < 0$$

Wir haben die Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umgewandelt mit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r(\phi) \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Für den Kreis sieht dies dann so aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \propto \frac{-1}{0\cos(\phi) - 1} \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Dies beschreibt offensichtlich einen Kreis.

Die verschiedenen Fälle sind in den Abbildungen 1, 2, 3 und 4 gezeigt.

Aufgabe H.5b innere Energie

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$H' = \frac{\mu}{2}\dot{y}^2 + \frac{\kappa}{y}$$

Wir beginnen mit der normalen Energie H, die aus den potentiellen und kinetischen Energie zusammen setzt.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + V(r_1) + V(r_2) \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

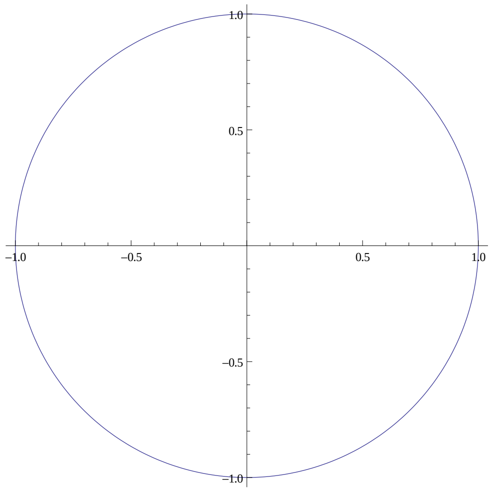

Abbildung 1: $B = 0$

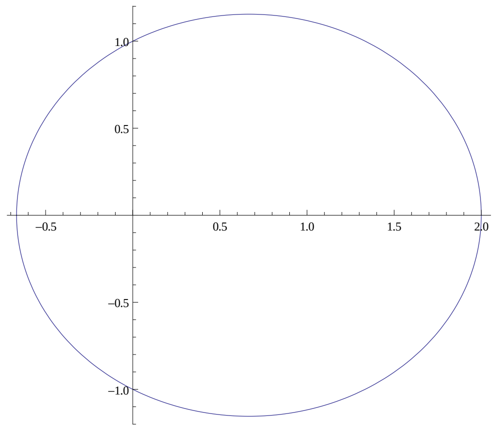

Abbildung 2: $0 < B < 1$

Wir subtrahieren $\frac{1}{2}M\dot{R}^2$ um die innere Energie zu erhalten.

$$H' = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2\right) - \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$H' = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 - M\dot{R}^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

R war gerade als $\frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{M}$ definiert. Wir leiten diesen Ausdruck nach der Zeit ab und lösen nach $M\dot{R}^2$ auf. Diesen Ausdruck setzen wir dann ein.

$$H' = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 - \frac{1}{M}\left(m_1\dot{r}_1 + m_2\dot{r}_2\right)^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$H' = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 - \frac{1}{M}\left(m_1^2\dot{r}_1^2 + m_2^2\dot{r}_2^2 - 2m_1\dot{r}_1^2 m_2\dot{r}_2^2\right)\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Wir multiplizieren mit M.

$$H' = \frac{1}{2M}\left(Mm_1\dot{r}_1^2 + Mm_2\dot{r}_2^2 - \left(m_1^2\dot{r}_1^2 + m_2^2\dot{r}_2^2 - 2m_1 m_2\dot{r}_1^2\dot{r}_2^2\right)\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Wir lösen die Klammer auf.

$$H' = \frac{1}{2M}\left(Mm_1\dot{r}_1^2 + Mm_2\dot{r}_2^2 - m_1^2\dot{r}_1^2 - m_2^2\dot{r}_2^2 + 2m_1 m_2\dot{r}_1^2\dot{r}_2^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Wir ersetzen M durch $m_1 + m_2$.

$$H' = \frac{1}{2M}\left((m_1 + m_2)m_1\dot{r}_1^2 + (m_1 + m_2)m_2\dot{r}_2^2 - m_1^2\dot{r}_1^2 - m_2^2\dot{r}_2^2 + 2m_1 m_2\dot{r}_1^2\dot{r}_2^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Einige Terme heben sich gegenseitig auf.

$$H' = \frac{1}{2M}\left(m_1 m_2\dot{r}_1^2 + m_1 m_2\dot{r}_2^2 - 2m_1 m_2\dot{r}_1\dot{r}_2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$H' = \frac{1}{2M}\left(m_1 m_2\dot{r}_1^2 - 2m_1 m_2\dot{r}_1\dot{r}_2 + m_1 m_2\dot{r}_2^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

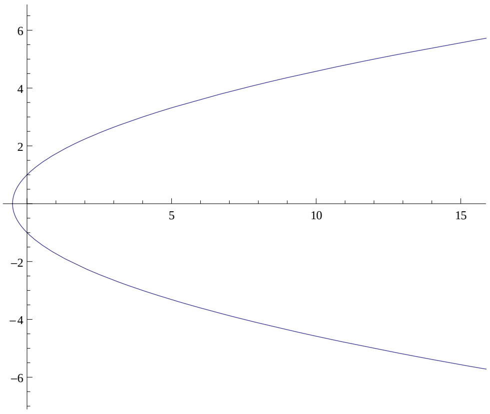

Abbildung 3: $B = 1$

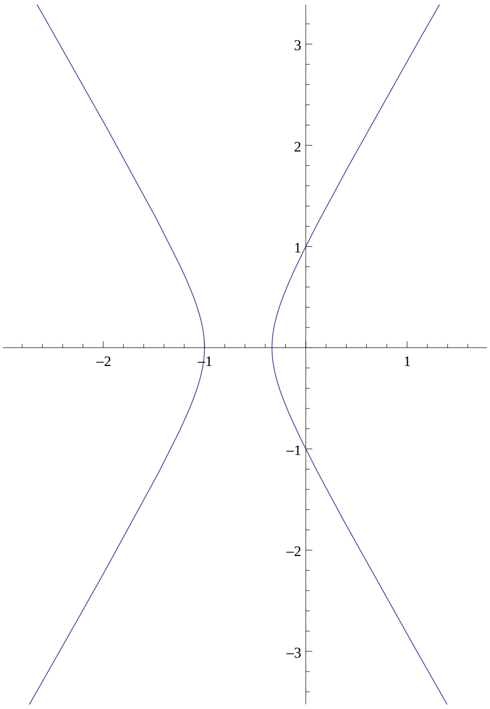

Abbildung 4: $B > 1$

Die Massen können vor die Klammer gezogen werden.

$$H' = \frac{m_1 m_2}{2M}\left(\dot{r}_1^2 - 2\dot{r}_1\dot{r}_2 + \dot{r}_2^2\right) + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$H' = \frac{m_1 m_2}{2M}\left(\dot{r}_1 - \dot{r}_2\right)^2 + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Dabei ist der Vorfaktor gerade $\frac{\mu}{2}$ und der Term in Klammern y^2.

$$H' = \frac{\mu}{2}y^2 + \kappa\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Der Mittelpunkt des Potentials wurde verschoben, damit es sich auf μ bezieht. Daher kann die Klammer hinter κ ersetzt werden.

$$H' = \frac{\mu}{2}y^2 + \frac{\kappa}{y}$$

Aufgabe H.5c Runge-Lenz Vektor

Der Runge-Lenz Vektor war definiert als:

$$\vec{B} = \frac{1}{\kappa}\dot{\vec{y}} \times L' + \hat{y}$$

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$B^2 = 1 + \frac{2}{\mu\kappa^2}H' L'^2$$

Dazu quadrieren wir den Runge-Lenz Vektor und setzen ihn gleich:

$$\left(\frac{1}{\kappa}\dot{\vec{y}} \times L' + \hat{y}\right)^2 = 1 + \frac{2}{\mu\kappa^2}H'L'^2$$
$$\left(\frac{1}{\kappa}\dot{\vec{y}} \times L'\right)^2 + \frac{2}{\kappa}\left(\dot{\vec{y}} \times L'\right)\hat{y} + (\hat{y})^2 = 1 + \frac{2}{\mu\kappa^2}H'L'^2$$

Da uns hier nur die Beträge interessieren, können wir die Kreuzprodukte durch normale Produkte der Beträge ersetzen. $\dot{y}$ ist immer senkrecht auf L', da L' selbst als Kreuzprodukt zu $\dot{y}$ definiert ist.

$$\frac{1}{\kappa^2}\dot{y}^2L'^2 + \frac{2}{\kappa}\dot{y}L' + 1 = 1 + \frac{2}{\mu\kappa^2}H'L'^2$$

Die $+1$ kann weg.

$$\frac{1}{\kappa^2}\dot{y}^2L'^2 + \frac{2}{\kappa}\dot{y}L' = \frac{2}{\mu\kappa^2}H'L'^2$$

Wir multiplizieren mit κ^2.

$$\dot{y}^2L'^2 + 2\kappa\dot{y}L' = \frac{2}{\mu}H'L'^2$$
$$\dot{y}^2L' + 2\kappa\dot{y} = \frac{2}{\mu}H'L'$$

Wir setzen die Definition der inneren Energie H' ein.

$$\dot{y}^2L' + 2\kappa\dot{y} = \frac{2}{\mu}\left(\frac{\mu}{2}\dot{y}^2 + \frac{\kappa}{y}\right)L'$$
$$\dot{y}^2L' + 2\kappa\dot{y} = \dot{y}^2L' + \frac{2}{\mu}\frac{\kappa}{y}L'$$

Der erste Summand kann jeweils gekürzt werden.

$$2\kappa\dot{y} = \frac{2}{\mu}\frac{\kappa}{y}L'$$

Jetzt kann noch weiter gekürzt werden.

$$\dot{y} = \frac{1}{\mu y}L'$$
$$\dot{y}\mu y = L'$$

Dies ist gerade die Definition des inneren Drehimpulses. Somit gilt die Behauptung.

Aufgabe H.6 Periheldrehung

Aufgabe H.6a ungestörter Fall

Aus der Definition der Energie lässt sich der gewünschte Ausdruck herausdestilieren.

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U$$

Umstellen ...

$$\begin{aligned}
\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 &= \frac{2(E-U)}{m} \\
\dot{\phi}^2 &= \frac{2(e-U) - m\dot{r}^2}{mr^2}
\end{aligned}$$

Wir benutzen die Relation, die in der Aufgabenstellung empfohlen wird.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\dot{r}\right)^2 &= \frac{2(E-U) - m\dot{r}^2}{mr^2} \\
\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\dot{r}\right)^2 &= \frac{2(E-U)}{mr^2\dot{r}^2} - \frac{1}{r^2} \\
\mathrm{d}\phi &= \frac{1}{L}\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \\
L\,\mathrm{d}\phi &= \sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \\
\frac{\partial}{\partial L} L\,\mathrm{d}\phi &= \frac{\partial}{\partial L}\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \\
\mathrm{d}\phi &= \frac{2L}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{L^2}{r^2}}}\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

Wir integrieren auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\phi &= \int \frac{2L}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(e-U) - \frac{L^2}{r^2}}} \\
\phi &= 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{L}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(e-U) - \frac{L^2}{r^2}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe H.6b Ansatz

Aufgabe H.6c Winkeländerungen