Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 2
Gruppe 11
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding* Thore Daunicht Christoph Hansen

18. April 2012

1 Aufgabe H.3

1.1 Aufgabe H.3a

Die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\phi &= \operatorname{atan2}(y, x) \\
\theta &= \arccos \frac{z}{r}
\end{aligned}
$$

Dabei ist $r \in [0, \infty)$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, $\theta \in [0, \pi)$.

$$
\vec{r}(r, \phi, \theta) = r \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
$$

1.2 Aufgabe H.3b

$$
\hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}
$$

Dabei ist die Länge dieses Vektors schon 1, da $\cos^2\phi \sin^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta + cos^2\theta = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = 0$.

$$
\hat{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = r \begin{pmatrix} -\sin\phi \sin\theta \\ \cos\phi \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r\sqrt{\sin^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi \sin^2\theta}} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{\theta} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r\sqrt{\cos^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\theta}} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\theta \\ \sin\phi \cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix}
$$

*mu@uni-bonn.de

Um zu zeigen, dass die Einheitsvektoren paarweise senkrecht zueinander sind, benutze ich das Skalarprodukt.

$$\hat{r} \cdot \phi = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\cos\phi\sin\theta\sin\phi + \sin\theta\sin\theta\cos\phi = 0$$

$$\hat{r} \cdot \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos^2\phi\sin\theta\cos\theta + \sin^2\phi\sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta = 0$$

$$\hat{\phi} \cdot \theta = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta(\cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi) = 0$$

Somit sind alle Einheitsvektoren paarweise orthogonal.

Anschaulich sind dies die Richtungsvektoren, die von einem bestimmten Punkt auf den nächsten Punkt verweisen, der beispielsweise $\mathrm{d}\phi$ weiter oder $\mathrm{d}r$ weiter liegt.

1.3 Aufgabe H.3c

$$\begin{aligned} |J| &= \begin{vmatrix} \cos\phi\sin\theta & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\cos\phi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos\theta^2\cos\phi^2\sin\theta + r^2\cos\phi^2\sin\theta^3 + r^2\cos\theta^2\sin\theta\sin\phi^2 + r^2\sin\theta^3\sin\phi^2 \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Jakobimatrix ist der Vorfaktor für $\mathrm{d}V$. Normalerweise ist ja $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Bei den Kugelkordinaten ist es eben *nicht* $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$, sondern $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$.

Und das ganze jetzt noch für die Zylinderkoordinaten

1.4 Aufgabe H.3a, die Zweite

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan(y/x) \\ z &= z \end{aligned}$$

Dabei ist $r \in [0,\infty)$, $z \in [0,\infty)$, $\phi \in (-\pi,\pi]$.

$$\vec{r}(r,\phi,z) = r\begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ z \end{pmatrix}$$

1.5 Aufgabe H.3b, die Zweite

$$\hat{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\phi} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \right| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Orthogonalität zeigen wir auch hier mit dem Skalarprodukt. Dass $\hat{z}$ orthogonal zu den anderen ist, ist trivial.

$$\hat{r} \cdot \hat{\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\phi(-r\sin\phi) + \sin\phi r\cos\phi = 0$$

Somit sind alle Einheitsvektoren paarweise orthogonal.

1.6 Aufgabe H.3c, die Zweite

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Die Bedeutung ist hier analog zu den Kugelkoordinaten. $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ oder $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$.

2 Aufgabe H.4

2.1 Aufgabe H.4a

Wir bestimmen als erstes den Gradient des Kraftfeldes:

$$\nabla V = \frac{2\gamma}{r^4}\vec{r}$$

Der Gradient ist rotationsfrei: $\nabla \times (\nabla V) = 0$. Ein rotationsfreies Feld ist konservativ (Satz von Stokes), somit bleibt die Energie erhalten.

Für den Drehimpuls:

$$\dot{\vec{L}} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = m\left(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}\right)$$

Da $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, ist das erste Kreuzprodukt 0. Für das zweite ersetzen wir $\dot{\vec{v}}$ durch $-\frac{\nabla V}{m} = -\frac{2\gamma}{mr^4}\vec{r}$.

$$= m\vec{r} \times \frac{-2\gamma}{mr^4}\vec{r} = \frac{-2\gamma}{r^4} \cdot \vec{r} \times \vec{r} = \frac{-2\gamma}{r^4} \cdot 0 = 0$$

Somit ist der Drehimpuls zeitlich invariant.

2.2 Aufgabe H.4b

Wir beginnen mit der Lagrangefunktion in Polarkoordinaten:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - V(r)$$

Aus der Drehimpulserhaltung folgt der Kelplersche Flächensatz:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m}$$

Außerdem bleibt die Summe an kinetischer (hier radial und zirkulär) und potentieller Energie erhalten:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V(r) = \text{const}$$

Wir setzen die Drehimpulserhaltung für $\dot{\phi}$ in die Energie ein und erhalten:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

2.2.1 Bestimmung von $r(t)$

Dies lösen wir nach $\dot{r}$ auf:

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}$$

Wir stellen nach $\mathrm{d}t$ um:

$$\mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Anschließend integrieren wir:

$$= \pm\left(\frac{mr}{2E}\sqrt{\frac{-L^2+2m(\gamma+Er^2)}{m^2r^2}}\right) - \left(\frac{mr_0}{2E}\sqrt{\frac{-L^2+2m\left(\gamma+Er_0^2\right)}{m^2r_0^2}}\right)$$

Dies stellen wir nach r um, um $r(t)$ zu erhalten:

$$r(t) = \pm\sqrt{\frac{L^2 - 2\gamma m + 4E^2t^2}{2Em}}$$

Wir definieren r_0 als $r(0)$:

$$r(0) = \pm\sqrt{\frac{L^2 - 2\gamma m}{2Em}} =: r_0$$

Da der Radius immer positiv sein muss, bleibt nur die positive Hälfte. Somit vereinfacht sich $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2}$$

Der Radikant muss nicht-negativ sein, damit die Wurzel reell bleibt. Somit muss gelten:

$$r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2 \geq 0$$

Daraus lässt sich für die Bahnkurve nur ableiten, dass sie entweder immer näher an das Zentrum kommt oder sich immer weiter von diesem Entfernt. Eine stabile Rotation wird es wohl nur geben, wenn $E = 0$ gilt.

2.2.2 Bestimmung von $\phi(t)$

Das $r(t)$ setzen wir in den Keplerschen Flächensatz $\dot{\phi} = \frac{L}{mr(t)^2}$ ein und stellen nach ϕ um:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{L}{m}\int \frac{\mathrm{d}t}{r(t)^2} \\
&= \frac{L}{m}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\pm\sqrt{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2}\right)^2} \\
&= \frac{L}{m}\int \frac{\mathrm{d}t}{r_0^2 + \frac{2E}{m}t^2} \\
&= \frac{L}{m}\left[\frac{\sqrt{m}\arctan\left(\frac{\sqrt{2E}t}{\sqrt{m}r_0}\right)}{\sqrt{2E}r_0}\right]
\end{aligned}$$

Wir definieren $\phi(0)$ als ϕ_0:

$$\phi(0) = \frac{L}{m}\frac{\sqrt{m}\arctan\left(\frac{\sqrt{2E}\cdot 0}{\sqrt{m}r_0}\right)}{\sqrt{2E}r_0} = 0 =: \phi_0$$

Der Winkel $\phi(t)$ ist letztlich $\phi(t) \propto \arctan(\lambda t)$. Somit gibt es eine Lösung für jeden Zeitpunkt und unabhängig von Energie E und Drehimpuls L. Der Winkel bleibt für sehr kleine (stark negative) Zeiten um $-\pi$ und schlägt dann recht schnell Richtung $+\pi$ um. Das spricht für eine Bahnkurve einer Parabel oder Hyperbel.

2.2.3 Bestimmung von $r(\phi)$

Als letztes bestimmen wir $r(\phi)$, in dem wir $\mathrm{d}t = \frac{m}{L}r^2\,\mathrm{d}\phi$ in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}t(r)$ einsetzen:

$$\mathrm{d}t = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\frac{m}{L}r^2\,\mathrm{d}\phi = \pm\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

$$\mathrm{d}\phi = \pm\frac{L}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Wir integrieren auf beiden Seiten.

$$\phi = \pm\frac{L}{m}\int\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}}$$

Zur Übersicht definieren wir $\beta := \sqrt{L^2 - 2\gamma m}$ und $\alpha := \sqrt{-L^2 + 2m\left(\gamma + Er^2\right)}$.

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\alpha\ln\left(\frac{2(-i\beta+\alpha)}{r}\right)}{\beta r}\frac{\sqrt{m^2r^2}}{\alpha}$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\ln\left(\frac{2(-i\beta+\alpha)}{r}\right)}{\beta r}\sqrt{m^2r^2}$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\ln\left(\frac{2(-i\beta+\alpha)}{r}\right)}{\beta}m$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\beta}\ln\left(\frac{2\left(-i\beta+\alpha\right)}{r}\right)$$

Jetzt können wir α und β wieder einsetzen:

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{L^2 - 2\gamma m}}\ln\left(\frac{2\left(-i\sqrt{L^2 - 2\gamma m} + \sqrt{-L^2 + 2m\left(\gamma + Er^2\right)}\right)}{r}\right)$$

Wir erinnern an $\pm\sqrt{\frac{L^2-2\gamma m}{2Em}} =: r_0$ und benutzen dies. Dazu stellen wir nach $\sqrt{L^2-2\gamma m}$ um und erhalten $\sqrt{L^2-2\gamma m} = \sqrt{2Em}r_0$.

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{2Em}r_0}\ln\left(\frac{2\left(-i\sqrt{2Em}r_0+\sqrt{-L^2+2m\left(\gamma+Er^2\right)}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{2Em}r_0}\ln\left(\frac{2\left(-i\sqrt{2Em}r_0+\sqrt{-L^2+2m\gamma+2mEr^2}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{2Em}r_0}\ln\left(\frac{2\left(-i\sqrt{2Em}r_0+\sqrt{-\left(\sqrt{2Em}r_0\right)^2+2mEr^2}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{2Em}r_0}\ln\left(\frac{2\left(-i\sqrt{2Em}r_0+\sqrt{2mE}\sqrt{r^2-r_0^2}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{im}{\sqrt{2Em}r_0}\ln\left(\frac{2\sqrt{2Em}\left(-ir_0+\sqrt{r^2-r_0^2}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{2E}r_0}\ln\left(\frac{2\sqrt{2Em}\left(-ir_0+\sqrt{r^2-r_0^2}\right)}{r}\right)$$

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{2E}r_0}\ln\left(\frac{2\sqrt{2Em}\left(-ir_0+i\sqrt{r_0^2-r^2}\right)}{r}\right)$$

Wir ziehen das i raus.

$$\phi = -\frac{L}{m}\frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{2E}r_0}\ln\left(\frac{2i\sqrt{2Em}\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r}\right)$$

Wir isolieren den Logarithmus.

$$-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}} = \ln\left(\frac{2i\sqrt{2Em}\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r}\right)$$

Wir wenden die Exponentialfunktion auf beiden Seiten an.

$$\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{2i\sqrt{2Em}\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r}\right)\right)$$

$$\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right) = \frac{2i\sqrt{2Em}\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r}$$

$$\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{2Em}} = \frac{\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r}$$

Wir vertauschen die Seiten.

$$\frac{\left(\sqrt{r_0^2-r^2}-r_0\right)}{r} = \exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{2Em}}$$

Wir lösen nach r auf.

$$r = -\frac{2\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{2Em}}r_0}{1+\left(\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{2i\sqrt{2Em}}\right)^2}$$

Und wir vereinfachen noch ein wenig.

$$r = -\frac{\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{i\sqrt{2Em}}r_0}{1-\exp\left(-\frac{m}{L}\frac{2\sqrt{2E}r_0\phi}{i\sqrt{m}}\right)\frac{1}{8Em}}$$

$$r = -\frac{\exp\left(\frac{m}{L}\frac{i\sqrt{2E}r_0\phi}{\sqrt{m}}\right)\frac{1}{i\sqrt{2Em}}r_0}{1-\exp\left(\frac{m}{L}\frac{2i\sqrt{2E}r_0\phi}{\sqrt{m}}\right)\frac{1}{8Em}}$$

Aus dieser überaus übersichtlichen Formel versuchen wir nun die möglichen Bahnkurven abzulesen.

Der Radius muss positiv und reell sein. Außerdem muss r_0 reell und positiv sein. r_0 war:

$$r_0 := \pm\sqrt{\frac{L^2 - 2\gamma m}{2Em}}$$

Die einzige Möglichkeit, ein vernünftiges r_0 zu bekommen ist, dass $L^2 > 2\gamma m$ ist.

Die Exponentialfunktion im Nenner muss ein rein imaginäres Ergebnis liefern, damit sich das i dort kürzt. Dazu muss der Exponent $i\left(\pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$ sein:

$$i\frac{m}{L}\frac{\sqrt{2E}r_0}{\sqrt{m}}\phi = i\frac{\pi}{2}$$

Daraus lässt sich ableiten:

$$E = \frac{L^2\pi^2}{8m\phi^2 r_0^2}$$

Da aber E und L Erhaltungsgrößen sind, würde dies bedeuten, dass sich ϕ nicht mit der Zeit ändern darf, was nur bei einer radialen Bewegung erfüllt sein kann. Dies steht allerdings im Konflikt zum Ergebnis in §2.2.2.