Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik221.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik221/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik221 Übung 1
Gruppe 11
Tutor: Franz Niecknig

Martin Ueding[*]   Thore Daunicht   Christoph Hansen

15. April 2012

Aufgabe H.1a

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \sum_j \sum_k \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ \sum_j \sum_k \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ \sum_j \sum_k \epsilon_{3jk} a_j b_k \end{pmatrix}$$

Oder mit der Einsteinschen Summenkonvention:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i = \begin{pmatrix} \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ \epsilon_{3jk} a_j b_k \end{pmatrix}$$

Aufgabe H.1b

Der ϵ-Tensor kann als Spatprodukt oder Determinante aufgefasst werden:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_k \end{vmatrix}, \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \vec{e}_l \\ \vec{e}_m \\ \vec{e}_n \end{vmatrix}$$

Das Produkt ist daher:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_l \\ \vec{e}_m \\ \vec{e}_n \end{vmatrix}$$

Dabei ist die Determinante einer transponierten Matrix gleich der ursprünglichen Matrix.

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_i \\ \vec{e}_j \\ \vec{e}_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_l & \vec{e}_m & \vec{e}_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_l & \vec{e}_i \cdot \vec{e}_m & \vec{e}_i \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l & \vec{e}_j \cdot \vec{e}_m & \vec{e}_j \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_k \cdot \vec{e}_l & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_m & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_n \end{vmatrix}$$

[*] mu@uni-bonn.de

Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren ist 1, sofern die beiden Indizes gleich sind, 0 sonst. Dies liefert das Kronekerdelta kompakt:

$$= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Aufgabe H.1c

Erste Summe

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{ii} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{ji} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{ki} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Es gilt immer $\delta_{ii} = i$. Wir benutzen nun den Entwicklungssatz. Dabei brauchen wir nur das erste Element der ersten Zeile zu nehmen.

$$= \delta_{ii} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} - \underbrace{\delta_{ji} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\delta_{ki} \cdot \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} \end{vmatrix}}_{=0}$$

Die beiden letzten Summanden sind 0, da $j \neq i$ und $k \neq i$ sein muss, damit überhaupt ein von 0 verschiedenes Ergebnis aus dem Tensorprodukt kommen kann. Somit bleibt im allgemeinen Fall nur der erste Summand.

$$= \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

Zweite Summe Hier benutzen wir die Formel, die wir gerade hergeleitet haben.

$$\sum_{ij} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = \sum_{j} (\delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj}) = \sum_{j} (\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kj}) = 3\delta_{kn} - \delta_{nk} = 2\delta_{kn}$$

Dritte Summe

$$\sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \sum_{k} 2\delta_{kk} = 6$$

Aufgabe H.1d

Komponentenweises Ausrechnen Einmal der klassische Weg:

$$
\begin{aligned}
a \times (b \times c) &= \vec{a} \times \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{a} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_3c_3 + a_1c_1) - c_2(a_3b_3 + a_1b_1) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es fehlen jetzt noch Elemente, die sich allerdings zu 0 addieren und somit einfach in beiden Vektoren eingefügt werden können.

$$
\begin{aligned}
&= \vec{b} \cdot (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - \vec{c} \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\
&= \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})
\end{aligned}
$$

ϵ-Tensor Mit dem ϵ-Tensor und der Einsteinschen Summenkonvention geht das ganze auch deutlich eleganter:

$$
\begin{aligned}
(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \epsilon_{ijk} a^j \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)^k \\
&= \epsilon_{ijk} a^j \epsilon^{k\alpha\beta} b_\alpha c_\beta \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon^{k\alpha\beta} a^j b_\alpha c_\beta \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon^{\alpha\beta k} a^j b_\alpha c_\beta \\
&= \left(\delta_i^\alpha \delta_j^\beta - \delta_j^\alpha \delta_j^\beta\right) a^j b_\alpha c_\beta \\
&= b_i a^j c_j - b_j a^j c_i \\
&= b_i(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i(\vec{b} \cdot \vec{a})
\end{aligned}
$$

Die gilt für alle $i \in \{1, 2, 3\}$, somit gilt es für den gesamten Vektor.

Aufgabe H.2a

Die Divergenz ist leicht bestimmt: $\nabla \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$.

$$
\begin{aligned}
\int_V \nabla \vec{F} \,\mathrm{d}V &= \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^{6-2x-2y} 3 \;\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} 3(6-2x-2y) \;\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} 18-6x-6y \;\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 18y-6xy-3y^2|_0^{3-x} \;\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 18(3-x)-6x(3-x)-3(3-x)^2 \;\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 3x^2-18x+27 \;\mathrm{d}x \\
&= x^3-9^2+27x|_0^3 \\
&= 27
\end{aligned}
$$

In Abbildung **??** ist zu sehen, dass es sich um eine Pyramide handelt. Das Volumen der Pyramide ist bei einer Grundfläche G und Höhe h: $V = \frac{1}{3}Gh$.

$$G = \frac{1}{2}6 \cdot 3 = 9$$

$$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3}9 \cdot 3 = 9$$

Das Volumen muss nun noch mit 3 multipliziert werden, somit komme ich auch auf 27.

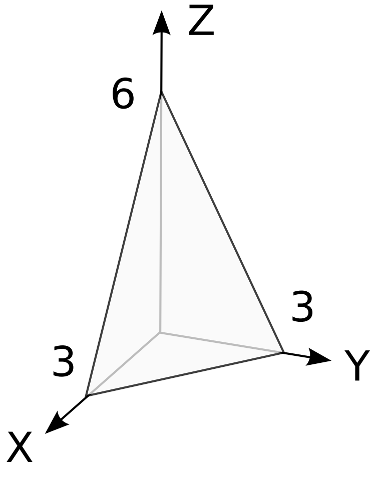

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe H.2

Aufgabe H.2b

Durch die drei Begrenzungsebenen geht kein Fluss, da in der x_n Ebene die Komponente $F_n = 0$ ist. Somit bleibt der Fluss durch die schräge Begrenzungsebene.

Die Funktion $z(x, y)$ wähle ich mit $z = 6 - 2x - 2y$. Damit ist:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 6 - 2x - 2y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_F \frac{F(x,y,z(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y,z(x,y))}{|\vec{e}_3 \cdot \vec{n}(x,y,z(x,y))|} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_F \frac{2x + 2y + 6 - 2x - 2y}{1} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_F 6 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \int_0^{3-x} 6 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 6(3-x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 18 - 6x \,\mathrm{d}x \\
&= 18x - 3x^2 |_0^3 \\
&= 18 \cdot 3 - 27 \\
&= 27
\end{aligned}$$