Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik211.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik211/ gefunden werden.

[disclaimer]

physik210 Übung 7

Gruppe 2
Tutor: Tobias Guttenberger

Martin Ueding
mu@uni-bonn.de

Christoph Hansen
christophhansen@uni-bonn.de

22. Mai 2012

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	6 / 6	64 / 6	6 / 7	4 / 4	2 / 5	20 / 28

1 Spannungsmessung

1a Idealfall

Im Idealfall geht gar kein Strom durch das Messgerät durch. Dann fällt auch keine Spannung über dem Innenwiderstand oder den Kontaktwiderständen auf. Es bleibt R_x.

$$U_x = IR_x = 5\,\mathrm{V}$$

1b allgemeiner Fall

Die oberen Widerständen zusammen genommen sind: $R_O = 1020000\,\Omega$.

Der Strom teilt sich wieder entsprechend den Verhältnissen auf. Das Verhältnis der Widerstände ist:

$$\frac{100000\,\Omega}{100000\,\Omega + 1020000\,\Omega} = 0.089286$$

Somit geht $4.4643\,\mu\mathrm{A}$ durch das Messgerät und $45.536\,\mu\mathrm{A}$ durch den zu vermessenden Widerstand. Mit den Widerständen ergibt sich, dass $4.5536\,\mathrm{V}$ abfallen. Man misst allerdings etwas weniger mit dem Messgerät, da ja noch Spannung über den Kontaktwiderständen abfällt. Man misst $4.46\,\mathrm{V}$.

1c keine Messfehler

Man kann den Messfehler kleiner machen, indem man den Innenwiderstand des Messgerätes größer macht. Dabei wird der Fehler allerdings nur beliebig klein, aber verschwindet nicht komplett.

Für eine letztlich fehlerfreie Messung kann die „Wheatstone Bridge“ (siehe Abbildung 1) genutzt werden. Dabei würden wir R_2 als Potentiometer realisieren, und so lange den Widerstand einstellen, bis durch V_G keine Spannung mehr fließt. Dann folgt aus der Symmetrie des Aufbaus, dass $R_2 = R_x$ ist.

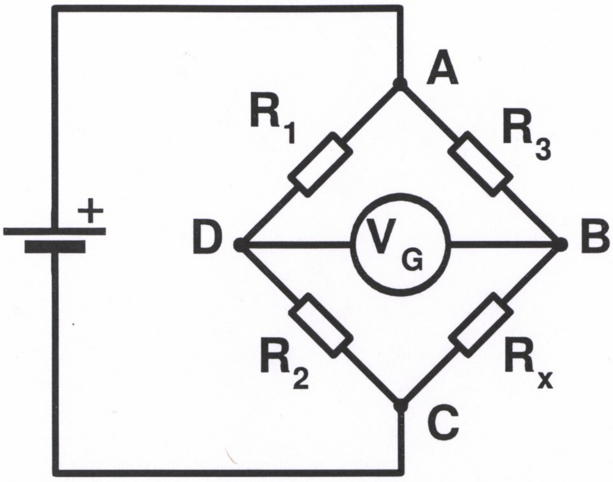

Abbildung 1: Wheatstone Bridge. Quelle: [[illegible]]

2 Aufladen des Kondensators

2a zeitlicher Verlauf

Am Anfang ist im Kondensator noch keine Ladung und somit auch kein Feld und keine Gegenspannung. Der Strom, der fließt, ist maximal, wir nennen ihn I_0. Wir können die Spannung, die den Strom noch antreibt, darstellen als:

$$U = U_0 - \frac{Q}{C}$$

Wir teilen die ganze Gleichung durch den Widerstand R:

$$I = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{CR}$$

Dabei definieren wir: $\tau := RC$.

$$I = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{\tau}$$

Dabei ist natürlich der Strom, der fließt, gerade die Ladung pro Zeit, die auf den Kondensator geht:

$$\dot{Q} = \frac{U_0}{R} - \frac{Q}{\tau}$$

Diese Differentialgleichung können wir lösen zu:

$$Q(t) = CU + c_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Dabei muss natürlich gelten, dass $Q(0) = 0$. Somit können wir die Konstante zu $-CU$ bestimmen. Also ist die Ladung:

$$Q(t) = CU\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

Die zeitliche Ableitung ist der gesuchte zeitliche Verlauf des Stroms:

$$I(t) = \frac{CU}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

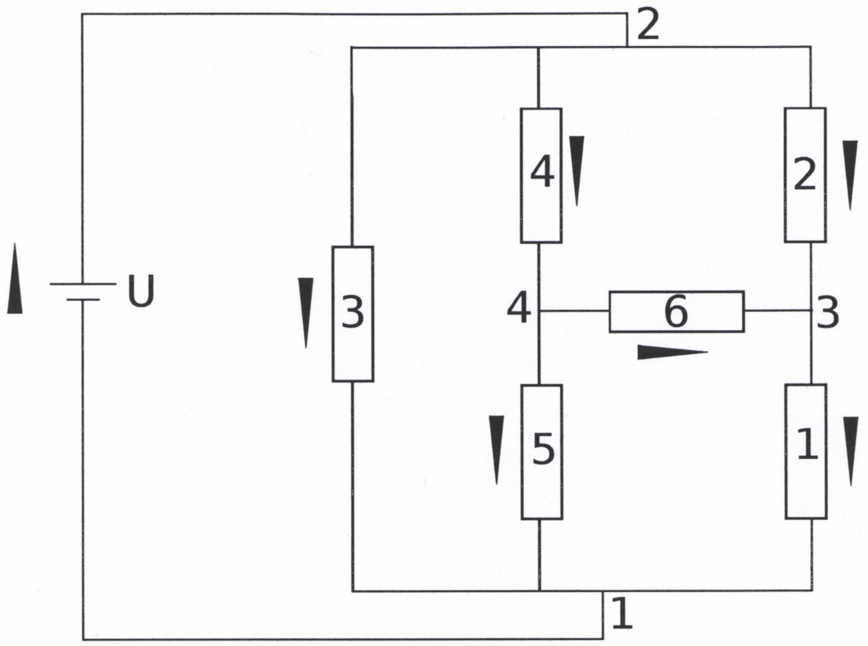

Abbildung 2: Schaltplan

2b Strom auf die Hälfte

Wir suchen $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{2}$. Dies ist $t = \tau \ln(2)$.

2c Feldenergie

Die Energie im Kondensator ist einfach: $W = \frac{1}{2}CU^2$.

Wenn sich der Kondensator entlädt, fließt ein Strom von:

$$I = -\frac{CU}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Die Arbeit am Widerstand ist $\mathrm{d}W = RI^2\,\mathrm{d}t$. Wir integrieren auf beiden Seiten:

$$W = \frac{RC^2U^2}{\tau^2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)\mathrm{d}t$$

Dies ist:

$$W = \frac{1}{2}\frac{RC^2U^2}{\tau} = \frac{1}{2}CU^2$$

3 Widerstandsnetzwerk

3a Knoten- und Maschengleichungen

Aus Abbildung 2 können wir die Maschengleichungen aufstellen:

1. $U_0 + U_3 = 0$
2. $U_0 + U_4 + U_5 = 0$ Vorzeichen!
3. $U_0 + U_2 + U_1 = 0$

4. $U_4 + U_6 - U_2 = 0$

An den vier Knoten können wir noch Knotengleichungen aufstellen:

1. $I_1 + I_5 + I_3 - I_0 = 0$
2. $I_0 - I_3 - I_4 - I_2 = 0$
3. $I_2 + I_6 - I_1 = 0$ b
4. $I_4 - I_6 - I_5 = 0$

3b Knoten auf gleichem Potential

Die Knoten 2 und 1 liegen auf den gleichen Potential, somit vereinfacht sich das Schaltbild wie in 2. Aus der Symmetrie des Problems folgt, dass durch den Widerstand R_6 kein Strom fließt, er kann also entfernt werden.

3c Gesamtwiderstand

Der Gesamtwiderstand zwischen 2 und 1 ist einfach die Summe über die verbleibenden drei Widerstände:

$$\frac{1}{R_G} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}$$

Somit gilt:

$$R_G = \frac{1}{2} R_0$$

3d Spannung

Die Spannung zwischen den Ecken 2 und 3 ist einfach die Hälfte der anliegenden Spannung, also $U_{12} = \frac{1}{2} U_0$.

3e Strom

Der Strom, der von 3 nach 1 geht, ist gerade die Spannung, die über R_1 abfällt durch R_1:

$$I_{31} = \frac{U_0}{2R}$$

Der Strom zwischen 3 und 4 ist, wie schon vorher argumentiert, gleich null.

4 Wasserkocher

Die Widerstände der Wasserkocher errechnen wir mit $P = \frac{U^2}{R}$.[1]

$$R_1 = 400\,\Omega \quad R_2 = 600\,\Omega \quad R_3 = 300\,\Omega$$

Wir errechnen den Ersatzwiderstand für Wasserkocher 2 und 3:

$$R_4 := \frac{1}{\frac{1}{600\,\Omega} + \frac{1}{300\,\Omega}} = 200\,\Omega$$

[1] Dies folgt aus $\frac{U}{I} = R$ und $P = UI$.

Alle drei Wasserkocher zusammen haben einen Widerstand von $R_5 := R_1 + R_4 = 600\,\Omega$, da diese in Reihe geschaltet sind.

Somit ergibt sich ein Strom von 0.5 A durch die ganze Konfiguration.

Aus der Spannungsteilerregel folgt:

$$U_1 = 200\,\mathrm{V} \quad U_4 = 100\,\mathrm{V}$$

Daraus folgt, dass der erste Wasserkocher eine Leistung von $P_1 = 100\,\mathrm{W}$ erreicht.

Aus der Stromteilerregel ($\frac{I}{I_G} = \frac{R_G}{R}$) folgt, dass durch den zweiten Wasserkocher, der ja $\frac{2}{3}$ des Widerstands in diesem Teil ausmacht, $\frac{1}{3}$ des Stroms.

Somit folgen die Ströme für die verbleibenden Wasserkocher:

$$I_2 = 0.16667\,\mathrm{A} \quad I_3 = 0.33333\,\mathrm{A}$$

Daraus folgen die Leistungen:

$$P_2 = 16.666\,\mathrm{W} \quad P_3 = 33.333\,\mathrm{W}$$

Also wird zuerst der erste Wasserkocher das Wasser kochen, und danach der Dritte und als letztes der Zweite.

5 Batterien mit Innenwiderstand

5a Leerlaufspannung, Innenwiderstand und Kurzschlussstrom

Bei der Leerlaufspannung fließt kein Strom, somit gibt es keine Spannungsabfälle über den Widerständen. Somit ist diese genau 10 V.

Der Innenwiderstand der Anordnung muss jetzt die Kabel berücksichtigen. Wir gehen davon aus, dass jeweils auf der halben Strecke zwischen den Batterien abgegriffen wird, die jeweiligen Kabel dann den halben Widerstand (dann $2.5\,\Omega$) haben.

Der Innenwiderstand pro Zelle ist dann also der R_i und zwei halbe R_L. Zusammen ist der Widerstand die Hälfte, also ist der Innenwiderstand $3.5\,\Omega$.

Der Kurzschlussstrom ergibt sich einfach aus der Spannung (10 V) und dem Ersatzwiderstand $3.5\,\Omega$. Der Strom ist dann:

$$\frac{U}{R} = I = 2.8571\,\mathrm{A}$$

5b Lastwiderstand

Der Widerstand setzt sich aus dem Ersatzwiderstand von $3.5\,\Omega$ und dem Lastwiderstand von $1\,\Omega$ zusammen, also ist der Widerstand $4.5\,\Omega$. Der Strom ist dann:

$$\frac{U}{R} = I = 2.2222\,\mathrm{A}$$

Literatur

[1] `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Wheatstonebridge.svg`