Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik111.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/physik111/ gefunden werden.

[disclaimer]

Physik Übung 11

Martin Ueding
Tutor: Lukas

18. Januar 2012

Aufgabe 1 Die Spinne wird vom ausgelenkten Netz gehalten. Daher gleichen sich Schwer- und Federkraft genau aus. Sei m die Masse der Spinne, z die Auslenkung, g der Ortsfaktor und k die Federkonstante.

$$\begin{aligned} F_{\text{Schwerkraft}} + F_{\text{Netz}} &= 0 \\ mg + (-kz) &= 0 \\ mg &= kz \\ \frac{mg}{z} &= k \\ \frac{0{,}00086\,\mathrm{kg} \cdot 10\,{}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}^2}}{0{,}003\,\mathrm{m}} &= k \\ 2{,}87\,{}^{\mathrm{N}}\!/_{\mathrm{m}} &= k \end{aligned}$$

Die Frequenz eines Federschwingers ist

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Setzt man ein, erhält man $f = 9{,}19\,\mathrm{Hz}$.

Aufgabe 2 Die Reibungskraft ist $F = -\beta v$. Energie (oder Arbeit) ist $E = Fd$, dabei ist d der Weg. Leitet man dies nach der Zeit ab, erhält man $\dot{E} = F\dot{d} = Fv$. Die Ableitung von F ist 0, da sich v nicht ändert. Setzt man nun die Reibungskraft ein, erhält man $\dot{E} = -\beta v^2$.

Aufgabe 3a Die Würfel werden den Kontakt verlieren, wenn die Geschwindigkeit des ersten Würfels abnimmt, also nach ihrem Maximum. Die maximale Geschwindigkeit (also maximale kinetische Energie) ist dort zu finden, wo in der Feder keine potenzielle Energie steckt, das ist bei einer Auslenkung $x = 0$.

Als ersten Schritt berechnet man die Energie, die dem System gegeben wird, indem man mit der zweiten Masse die Feder staucht. Die Federenergie ist $E = \frac{1}{2}kx^2$, wobei k die Federkonstante bezeichnet. (Dies folgt aus dem Wegintegral der Federkraft $F = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -kx\,\mathrm{d}x$.)

Die Energie im System beträgt also in der Konfiguration, die im Bild b abgebildet ist,

$$E_b = \frac{1}{2}kA^2.$$

Danach entspannt sich die Feder und beschleunigt die beiden Massen nach rechts in die positive Richtung. In Bild c ist die Feder wieder entspannt, die Federenergie ist vollständig in kinetische Energie umgewandelt.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}kA^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \\
\sqrt{\frac{kA^2}{m_1 + m_2}} &= v \\
\sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}(0{,}20\,\mathrm{m})^2}{9\,\mathrm{kg} + 7\,\mathrm{kg}}} &= v \\
0{,}5\,\mathrm{m/s} &= v =: v_c
\end{aligned}$$

Aufgabe 3b Bei der Trennung haben beide Würfel noch die gleiche Geschwindigkeit v_c. m_2 bewegt sich linear fort, setzt man t_0 auf den Trennungszeitpunkt erhält man

$$x_{m_2}(t) := v_c t$$

als Ortsfunktion für m_2.

Für die erste Masse alleine ist die Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1}}$. Beim Trennungzeitpunkt $t = t_0$ ist die Geschwindigkeit gerade am Maximum, die Nullstelle kommt $\frac{T}{4} = \frac{1}{4f}$ später. Bei einer Frequenz von $f = 0{,}53\,\mathrm{Hz}$ ist das also bei $t = 0{,}47\,\mathrm{s}$.

Die kinetische Energie wurde verringert, da die Masse reduziert wurde. Somit gibt es eine geringere Maximalamplitude. Diese kann man über die Energieerhaltung errechnen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1 v_c^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\
m_1 v_c^2 &= kx^2 \\
\sqrt{\frac{m_1 v_c^2}{k}} &= x \\
\sqrt{\frac{9\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}25\,\mathrm{m^2/s^2}}{100\,\mathrm{N/m}}} &= x \\
0{,}15\,\mathrm{m} &= x
\end{aligned}$$

Bei $t = 0{,}47\,\mathrm{s}$ ist die zweite Masse

$$x_{m_2}(0{,}47\,\mathrm{s}) = 0{,}5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}47\,\mathrm{s} = 0{,}24\,\mathrm{m}$$

vom Gleichgewichtspunkt entfernt. Abzüglich der neuen Maximalamplitude $A_2 = 0{,}15\,\mathrm{m}$ ergibt sich ein Abstand von $0{,}09\,\mathrm{m}$.

Aufgabe 4a

$$I = \int r^2 dm$$

Substituiere mit $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{m}{l}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{l} \int_0^L r^2 \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{m}{l} \frac{1}{3} l^3 \\ &= \frac{1}{3} m l^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4b Hier kann man eine Differentialgleichung aufstellen.

$$\alpha I = M$$

Die Auslenkung ist $\sin(\theta) L \approx \theta L$. Das Drehmoment ist dann $M = \theta L^2$.

$$\ddot{\theta} I = -k \theta L^2$$

Dies wird durch den Ansatz $\theta(t) = \hat{\theta} \sin(\omega t)$ gelöst.

$$\begin{aligned} -\hat{\theta} \sin(\omega t) \omega^2 I &= -k L^2 \hat{\theta} \sin(\omega t) \\ \omega &= \sqrt{\frac{k L^2}{I}} \end{aligned}$$

Somit ist die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{kL^2}{I}}$.

Aufgabe 4c Setzt man ein, erhält man für $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{100\,\mathrm{N/m}\, L^2}{\frac{1}{3}\, 5\,\mathrm{kg}\, L^2}} = 1{,}23\,\mathrm{Hz}$$

Aufgabe 5 Man fängt mit Energieerhaltung an. Sei $\dot{C} = 0$.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pot}} + E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{rot}} &= C \\ mgh + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 &= C \end{aligned}$$

Die Höhe des Schwerpunkts der Kugel über dem tiefsten Punkt ist $4R(1-\cos(\theta))$.

$$mg4R(1-\cos(\theta)) + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}4R)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mR^2\omega^2 = C$$

Kürze m und wende die Näherung für den Kosinus an.

$$\begin{aligned}
2gR\theta^2 + 8(\dot{\theta}R)^2 + \frac{1}{5}R^2(4\dot{\theta})^2 &= C \\
2gR\theta^2 + 8R^2\dot{\theta}^2 + \frac{16}{5}R^2\dot{\theta}^2 &= C \\
2gR\theta^2 + \left(\frac{16}{5}R^2 + 8R^2\right)\dot{\theta}^2 &= C \\
2g\theta^2 + \frac{56}{5}R\dot{\theta}^2 &= C
\end{aligned}$$

Als Lösungsansatz für die Differentialgleichung nimmt man $\theta(t) = Ae^{Bt}$ und $\dot{\theta}(t) = ABe^{Bt}$.

$$2g(Ae^{Bt})^2 + \frac{56}{5}R(ABe^{Bt})^2 = C$$

Die Exponentialfunktion wird nie negativ und kann daher gekürzt werden.

$$\begin{aligned}
2gA^2 + \frac{56}{5}RA^2B^2 &= C \\
2g + \frac{56}{5}RB^2 &= C \\
\frac{56}{5}RB^2 &= C - 2g \\
B^2 &= \frac{5}{56}R^{-1}(C-2g) \\
B^2 &= \frac{5}{56}\frac{C}{R} - \frac{5}{28}\frac{g}{R}
\end{aligned}$$

Die Konstante C wird so gewählt, dass $\frac{5}{56}\frac{C}{R} = 0$ ist.

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{28}\frac{g}{R} &= B^2 \\
i\sqrt{\frac{5}{28}\frac{g}{R}} &= B
\end{aligned}$$

Die Lösung für die Differentialgleichung ist somit

$$\theta(t) = \hat{\theta}\exp\left(i\sqrt{\frac{5}{28}\frac{g}{R}}t\right).$$

Aus der Eulerformel $e^{i\theta} = \text{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ folgt, dass $-iB$ die Kreisfrequenz $\omega = \frac{\theta}{t}$ ist. Somit ist die Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{5}{28}\frac{R}{g}}.$$

Die **Näherung für den Cosinus** ist über die Taylorreihe zu finden.

$$\cos(\theta) \approx \sum_{n}^{2} \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\theta^n}\cos(0)\theta^n$$
$$\cos(\theta) \approx \frac{\cos(0)}{0!} - \frac{\sin(0)}{1!}\theta - \frac{\cos(0)}{2!}\theta^2$$
$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$$