Vorbemerkung

Dies ist ein abgegebener Übungszettel aus dem Modul physik111.

Dieser Übungszettel wurde nicht korrigiert. Es handelt sich lediglich um meine Abgabe und keine Musterlösung.

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/physik111/ gefunden werden.

[disclaimer]

Physik 10

Martin Ueding
Tutor: Lukas

5. Februar 2012

Aufgabe 1a Auf die Kugel wirkt die Schwerkraft sowie die Reibungskraft. Eigentlich müsste man den Auftrieb noch mit einbeziehen, aber das kann hier wohl vernachlässigt werden.

$$\vec{F} = m\vec{g} - \alpha\vec{v} \tag{1}$$

Nun ist die Kraft gerade proportional zur Beschleunigung, mit $F = ma = \dot{v} = \ddot{z}$ ergibt sich:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\vec{v} \tag{2}$$

Aufgabe 1b Wenn die Kugel ihre Sedimentgeschwindigkeit erreicht, wirkt keine beschleunigende Kraft mehr auf die Kugel, sie befindet sich in einem Kräftegleichgewicht. Es gilt also $\dot{\vec{v}} = 0$:

$$0 = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\vec{v} \tag{3}$$

Löst man (**??**) nach $\vec{v}$ auf, so erhält man die Sediment- oder Maximalgeschwindigkeit.

$$\frac{m\vec{g}}{\alpha} = \vec{v}_{max} \tag{4}$$

Aufgabe 1c Um den Ansatz (**??**) zu überprüfen, bildet man die Ableitung (**??**) und setzt in die Gleichung ein.

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right) \tag{5}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\alpha}{m}\frac{mg}{\alpha}e^{-\frac{\alpha t}{m}} = ge^{-\frac{\alpha t}{m}} \tag{6}$$

Setzt man (**??**) und (**??**) in die Differentialgleichung (**??**) ein, erhält man:

$$ge^{-\frac{\alpha t}{m}} = \vec{g} - \frac{\alpha}{m}\frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$$
$$e^{-\frac{\alpha t}{m}} = 1 - \left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}}\right)$$

Es ist zu sehen, dass sich eine wahre Aussage ergibt, der Ansatz löst die Differentialgleichung.

Aufgabe 1d Die Maximalgeschwindigkeit war durch (**??**) gegeben. Teilt man (**??**) durch die Maximalgeschwindigkeit, bekommt man den Anteil an der Maximalgeschwindigkeit $p(t)$, abhängig von der Zeit:

$$p(t) \equiv \frac{v(t)}{\frac{mg}{\alpha}} = 1 - e^{-\frac{\alpha t}{m}} \tag{7}$$

Gesucht ist das t, für das $p(t) = 0{,}9$. Formt man (**??**) etwas um, erhält man:

$$0.1 = e^{-\frac{\alpha t}{m}}$$

Dies ist über den ln lösbar.

$$\ln(0.1) = -\frac{\alpha t}{m}$$
$$\ln(0{,}1)\frac{m}{\alpha} = t \tag{8}$$

Da $v_{max} = \frac{mg}{\alpha} = 5\,\mathrm{cm/s}$ ist, kann man nun in (**??**) $\frac{m}{\alpha}$ durch $\frac{v_{max}}{g}$ ersetzen.

$$-\ln(0{,}1)\frac{0{,}05\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}0115\,\mathrm{s}$$

Die Kugel erreicht 90% ihrer Maximalgeschwindigkeit nach etwas über einer Hundertstelsekunde.

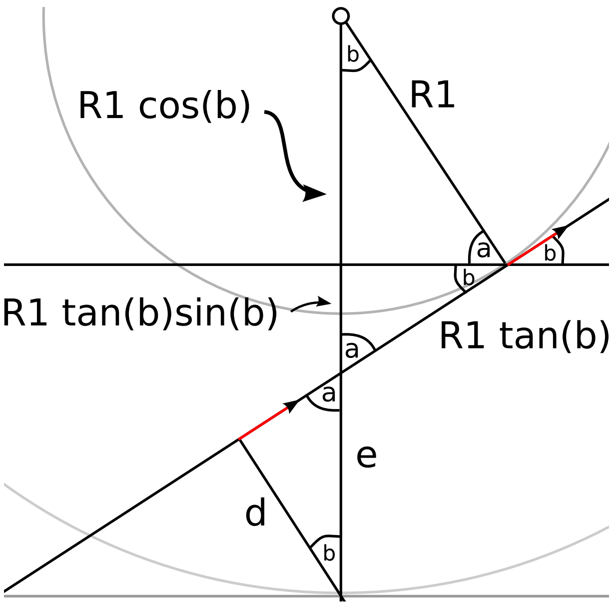
Aufgabe 2a Es wirkt die horizontale Komponente der Zugkraft,

$$F_{Z\perp} = F_Z \cos(\beta).$$

Dazu kommt noch die Reibungskraft am Boden, die in die entgegengesetzte Richtung wirkt.

Aufgabe 2b Das Jojo dreht sich um den Aufsetzpunkt. Dadurch können Schwerkraft und Reibungskraft kein Drehmoment ausüben, weil diese Kräfte am Aufsetzpunkt angreifen und radial wirken. Somit ist $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$.

Die Zugkraft kann man mit Hilfe der Linienflüchtigkeit so weit nach hinten verschieben, dass diese senkrecht zur Verbindungslinie zum Aufsetzpunkt des Jojos ist. Der vordere rote Pfeil wurde nach hinten verschoben, bis er an d stößt. Jetzt steht die Kraft senkrecht auf den Kraftarm d. Dieser ist abhängig von der Geometrie des Jojos und abhängig vom Zugwinkel β (in der Zeichnung b).



Gegeben sind β, R_1 sowie R_2. Wie man an der Zeichnung erkennen kann, lassen sich die Seiten der Dreiecke in Abhängigkeit der gegebenen Größen angeben. Als erstes benennt man alle Winkel, in dem man Gegen- und Stufenwinkel konstruiert. Dabei ist $\alpha = \pi - \beta$ (in der Zeichnung a). e ist die Differenz von R_2 und den beiden bereits in der Zeichnung bestimmten Längen:

$$e = R_2 - R_1(\cos(\beta) + \tan(\beta)\sin(\beta))$$

Für die Länge des Kraftarms d ergibt sich

$$\begin{aligned}
d &= \cos(\beta) \cdot e \\
&= \cos(\beta)\left(R_2 - R_1\left(\cos(\beta) + \tan(\beta)\sin(\beta)\right)\right) \\
&= \cos(\beta)\left(R_2 - R_1\left(\cos(\beta) + \frac{\sin(\beta)^2}{\cos(\beta)}\right)\right) \\
&= R_2\cos(\beta) - R_1\left(\cos(\beta)^2 - \left(\cos(\beta)\frac{\sin(\beta)^2}{\cos(\beta)}\right)\right) \\
&= R_2\cos(\beta) - R_1\left(\cos(\beta)^2 - \sin(\beta)^2\right) \\
&= R_2\cos(\beta) - R_1.
\end{aligned}$$

Das Drehmoment ist Kraft mal Kraftarm:

$$M = (R_2\cos(\beta) - R_1) \cdot F_Z \tag{9}$$

Aufgabe 2c Man nimmt das Drehmoment aus der vorigen Aufgabe (**??**). Weiterhin ist in der Aufgabenstellung $M = I_a\dot{\omega}$ und $a = R_2\dot{\omega}$ gegeben. Setzt man entsprechend ein, erhält man

$$\begin{aligned}
a &= R_2\dot{\omega} \\
&= R_2\frac{M}{I_a} \\
&= R_2\frac{(R_2\cos(\beta) - R_1) \cdot F_Z}{I_a}.
\end{aligned}$$

Das Trägheitsmoment I ist auf den Mittelpunkt des Jojos bezogen, es rollt allerdings um den Aufsetzpunkt. Aus dem Steinerschen Satz folgt

$$I_a = I + mR_2^2$$

Somit ist die resultierende Beschleunigung

$$a = R_2\frac{(R_2\cos(\beta) - R_1) \cdot F_Z}{I + mR_2^2}.$$

Aufgabe 2d Wenn das Drehmoment null ist, rollt das Jojo nicht. Ist der Winkel β so gewählt, dass die Kraft durch den Aufsetzpunkt geht, ist der Kraftarm $d = 0$.

$$0 = R_2 \cos(\beta) - R_1$$
$$\beta = \arccos\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Dieses β ist der kritische Winkel, bei dem (solange man vorsichtig zieht) nichts passiert. Ist das Drehmoment positiv, rotiert das Jojo im Uhrzeigersin, also im negativen Sinn, oder nach rechts.

Für eine Rotation nach rechts gilt:

$$0 < R_2 \cos(\beta) - R_1$$
$$\frac{R_1}{R_2} < \cos(\beta)$$

Der Kosinus ist nur im Interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ positiv. β muss also zwischen dem positiven und negativen kritischen Winkel liegen:

$$\arccos\left(\frac{R_1}{R_2}\right) > |\beta|, \quad \beta \in (-\pi, \pi]$$

Für eine Rotation nach links muss der Winkelbetrag größer sein, man zieht entweder steil nach oben, steil nach unten oder direkt nach links.

$$\arccos\left(\frac{R_1}{R_2}\right) < |\beta|, \quad \beta \in (-\pi, \pi]$$

Aufgabe 3 In der Aufgabenstellung steht, dass der Stock 2 m lang ist, in der Zeichnung ist er allerdings mit 4 m dargestellt. Ich gehe davon aus, dass er 2 m lang ist.

Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, müssen Impuls, Drehimpuls und die Energie komplett erhalten bleiben. Aus der Impulserhaltung folgt:

$$m_p v_a = m_s v_s + m_p v_e \tag{10}$$

Beim Kollisionszeitpunkt kann man die lineare Bewegung des Pucks als eine Rotation um den Stockmittelpunkt auffassen. Dieser Drehimpuls muss auch nach dem Stoß erhalten bleiben.

$$\frac{l}{2} m_p v_a = \frac{l}{2} m_p v_e + I\omega \tag{11}$$

Wobei $I = \frac{1}{12} m_s l^2$ ist, wie auf dem letzten Aufgabenblatt bestimmt. l ist die Länge des Stocks, also 4 m.

Die Energie, die sich aus linearer Bewegungsenergie und Rotationsenergie zusammensetzt, bleibt auch erhalten.

$$\frac{1}{2} m_p v_a^2 = \frac{1}{2} m_p v_e^2 + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{12}$$

Die zwei Unbekannten, v_s und ω, können nun durch die drei Gleichungen (**??**) (**??**) und (**??**) bestimmt werden. Man könnte v_e auch bestimmen, da man genug Gleichungen hätte.

Dazu vereinfacht man die Gleichungen.

$$m_p v_a = m_s v_s + m_p v_e \tag{13}$$

$$m_p v_a = m_p v_e + \frac{2I\omega}{l} \tag{14}$$

$$m_p v_a^2 = m_p v_e^2 + m_s v_s^2 + I\omega^2 \tag{15}$$

Für (**??**) kann man umformen.

$$\begin{aligned} m_p v_a &= m_s v_s + m_p v_e \\ \frac{m_p v_a - m_s v_s}{m_p} &= v_e \\ v_a - \underbrace{\frac{m_s}{m_p} v_s}_{\alpha} &= v_e \\ v_a - \alpha &= v_e \end{aligned}$$

Aus der Definition von α ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{m_s}{m_p} v_s \\ \frac{m_p}{m_s} \alpha &= v_s \end{aligned} \tag{16}$$

Die neue Definition von v_e kann man in (**??**) einsetzen.

$$\begin{aligned} m_p v_a &= m_p v_e + \frac{2I\omega}{l} \\ m_p v_a &= m_p (v_a - \alpha) + \frac{2I\omega}{l} \\ m_p v_a &= m_p v_a - m_p \alpha + \frac{2I\omega}{l} \\ 0 &= -m_p \alpha + \frac{2I\omega}{l} \\ m_p \alpha &= \frac{2I\omega}{l} \\ \frac{m_p \alpha l}{2I} &= \omega \end{aligned} \tag{17}$$

Jetzt kann man in (**??**) v_e und ω ersetzen.

$$
\begin{aligned}
m_p v_a^2 &= m_p v_e^2 + m_s v_s^2 + I\omega^2 \\
m_p(v_a^2 - v_e^2) &= m_s v_s^2 + I\omega^2 \\
m_p\left(v_a^2 - (v_a-\alpha)^2\right) &= m_s\left(\frac{m_p}{m_s}\alpha\right)^2 + I\left(\frac{m_p\alpha l}{2I}\right)^2 \\
m_p(v_a^2 - (v_a^2 - 2v_a\alpha + \alpha^2)) &= \frac{m_p^2}{m_s}\alpha^2 + \frac{m_p^2 l^2}{4I}\alpha^2 \\
m_p(2v_a\alpha - \alpha^2) &= \frac{m_p^2}{m_s}\alpha^2 + \frac{m_p^2 l^2}{4I}\alpha^2
\end{aligned}
$$

Eine Lösung ist $\alpha = 0$. Dies bedeutet allerdings, dass $v_s = 0$, und somit ist es die Lösung vor dem Stoß und in diesem Falle uninteressant. Das heißt, dass $m_p\alpha \neq 0$ verbleibt, und man jetzt dadurch teilen darf.

$$
\begin{aligned}
m_p\alpha(2v_a - \alpha) &= \frac{m_p^2}{m_s}\alpha^2 + \frac{m_p^2 l^2}{4I}\alpha^2 \\
2v_a - \alpha &= \frac{m_p}{m_s}\alpha + \frac{m_p l^2}{4I}\alpha \\
2v_a &= \frac{m_p}{m_s}\alpha + \frac{m_p l^2}{4I}\alpha + \alpha \\
2v_a &= \alpha\left(\frac{m_p}{m_s} + \frac{m_p l^2}{4I} + 1\right) \\
\frac{2v_a}{\frac{m_p}{m_s} + \frac{m_p l^2}{4I} + 1} &= \alpha
\end{aligned}
$$

Setzt man jetzt die Zahlen ein, erhält man $\alpha = \frac{2}{3}\,\mathrm{m/s}$. Setzt man in (**??**) ein, erhält man $v_s = \frac{4}{3}\,\mathrm{m/s}$. Setzt man dies in (**??**) ein, ist $\omega = 4\,\mathrm{1/s}$.

Aufgabe 4a Das Trägheitsmoment ist bei diskreten Massen

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

in diesem Fall also

$$I = (m_K + m_T)\, d_0^2, \tag{18}$$

wobei d_0 die Entfernung von der Drehachse ist.

Aufgabe 4b Wahrscheinlich sitzen Herr Kowalski und seine Tochter nicht auf der gleichen Seite der Wippe, daher gleichen sich ihre Drehmomente zum Teil aus. Anderfalls würden diese sich addieren. Auf beide Körper wirkt die Gewichtskraft $F = mg$. Als Drehmoment wirkt allerdings nur die Kraft, die senkrecht zur Wippe steht, somit ist es nur noch

$$F = mg\cos(\theta).$$

Man multipliziert beide Kräfte mit dem Sitzabstand (wobei die Tochter auf der negativen Seite der Wippe sitzt), um das Drehmoment $M = Fr$ zu bekommen. Dann addiert man das positive und negative Drehmoment und erhält das gesammte Drehmoment.

$$M = (m_K - m_T)\, d_0 g\cos(\theta) \tag{19}$$

Die Winkelbeschleunigung ergibt sich aus $M = I\alpha$. Teilt man (**??**) durch I, erhält man

α.

$$\frac{M}{I} = \alpha = \frac{(m_K - m_T)\, d_0 g}{(m_K + m_T)\, d_0^2} \cos(\theta)$$
$$= \frac{(m_K - m_T)}{(m_K + m_T)} \frac{g}{d_0} \cos(\theta)$$

Aufgabe 4c Die Tochter sitzt weiterhin im Abstand d_0 von der Achse entfernt. Herr Kowalski sitzt jetzt im Abstand d. In (**??**) und (**??**) wurde das d_0 ausgeklammert, das ist jetzt nicht mehr möglich. Somit müssen diese Größen neu bestimmt werden.

$$I = m_K d^2 + m_T d_0^2,$$

$$M = (m_K d - m_T d_0)\, g \cos(\theta)$$

Teilt man wieder durch I, ergibt sich:

$$\alpha_d = \frac{m_K d - m_T d_0}{m_K d^2 + m_T d_0^2}\, g \cos(\theta) \qquad (20)$$

Aufgabe 4d Es wippt sich wahrscheinlich am besten, wenn die Wippe in keinem Winkel „von selbst“ beschleunigt, also $\alpha = 0$. Dazu muss man (**??**) gleich null setzen.

$$0 = \frac{m_K d - m_T d_0}{m_K d^2 + m_T d_0^2}\, g \cos(\theta) \quad \forall \theta$$

Da dies für jeden Winkel gelten soll, muss der Zähler null werden.

$$0 = m_K d - m_T d_0$$

Dies kann man nach d umformen und erhält

$$\frac{m_T}{m_K} d_0 = d$$

als den optimalen Sitzabstand für Herrn Kowalski.