Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul physik111.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/physik111/ gefunden werden.

[disclaimer]

1	2	3	4	Σ
4	3	3	6	16

Physik 9

Martin Ueding
Tutor: Lukas

22. Dezember 2011

Aufgabe 1 Für eine Vollkugel folgt das Trägheitsmoment aus (1).

$$J = \frac{2}{5}mr^2 = 2{,}4 \cdot 10^{38}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{1}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist in der Aufgabenstellung gegeben:

$$f = 2{,}1\,\mathrm{U/s} \tag{2}$$

Dies kann man nun in Radiant umrechnen:

$$\omega = 2\pi f = 13{,}2\,\mathrm{1/s} \tag{3}$$

Nun setzt man in die Formel für die Rotationsenergie ein.

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = 2{,}04 \cdot 10^{40}\,\mathrm{J} \tag{4}$$

Aufgabe 1a Die Winkelbeschleunigung kann analog zu (3) in Radiant umgerechnet werden:

$$\alpha = -2\pi 10^{-10}\,\mathrm{U/s^2} = -6{,}28 \cdot 10^{-10}\,1s^2 \tag{5}$$

Die Verlustleistung ist durch die Verzögerung gegeben. Folgende Gleichung erhält man, indem man (4) nach der Zeit ableitet.

Zwischenschritt bei der Ableitung?

$$\dot{E}_{rot} = P = I\alpha\omega = -1{,}98 \cdot 10^{25}\,\mathrm{W} \tag{6}$$

2,5/2,5

Aufgabe 1b Nach einer Rotationszeit t wird der Stern keine Energie mehr haben:

$$E_{rot} + Pt = 0 \tag{7}$$

Daraus folgt:

$$t = 1{,}06 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s} = 3{,}36 \cdot 10^{7}\,\mathrm{a} \tag{8}$$

1,5/1,5

Aufgabe 2 Das Trägheitsmoment I ist im Allgemeinen folgendermaßen definiert:

$$I = \int r_\perp^2 \,\mathrm{d}m \tag{9}$$

Man substituiert nun dm. Ein kleines Massenstück hat ein kleines Flächenstück. Das Verhältnis ist – da die Platte homogen ist – genau das Verhältnis der kompletten Masse zur kompletten Fläche.

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = \frac{m}{a^2} \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt für das Trägheitsmoment der Platte:

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11}$$

Dies kann man nun auflösen:

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{m}{a^2}(x^2+y^2)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y \tag{12}$$

Die Grenzen einsetzen:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a^2}\left(\frac{a^3}{24}+\frac{ay^2}{2}-\left(\frac{-a^3}{24}+\frac{-ay^2}{2}\right)\right)\mathrm{d}y \tag{13}$$

Vereinfachen:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a^2}\left(\frac{a^3}{12}+ay^2\right)\mathrm{d}y \tag{14}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{m}{a}\left(\frac{a^2}{12}+y^2\right)\mathrm{d}y \tag{15}$$

Das zweite Integral ausrechnen:

$$\left[\frac{m}{a}\left(\frac{a^2}{12}y+\frac{1}{3}y^3\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tag{16}$$

Grenzen einsetzen:

$$\frac{m}{a}\left(\frac{1}{12}a^2\frac{a}{2}2+\frac{1}{3}\frac{a^3}{8}2\right) \tag{17}$$

Vereinfachen:

$$I=\frac{1}{6}ma^2 \tag{18}$$

✓ 3/3

Aufgabe 3a Das Trägheitsmoment einer Scheibe ist durch $I=\frac{1}{2}MR^2$ gegeben. Die Tangentialbeschleunigung am Rand ist durch $a=R\alpha$ gegeben.

Der Zug am Seil ist die Gewichtskraft, reduziert um die Beschleunigung, die die Masse erfährt:

$$T=m(g-R\alpha)=m(g-a) \tag{19}$$

↯ M ist schon die Masse d. Scheibe!

Zusammen mit $M=I\alpha$, der Bewegungsgleichung der Scheibe, sowie $M=\cancel{mgR}$, dem Drehmoment, das die Masse auf die Scheibe bringt, ergibt sich:

$= m(g-a)R$ Rolle wird beschleunigt!

$$\alpha=\frac{mgR}{\frac{1}{2}MR^2}=\frac{2mg}{MR} \tag{20}$$

(✓)

Jetzt kann man die Beschleunigung der Masse ausrechnen:

$$a=\frac{mgR}{\frac{1}{2}MR}=\frac{2mg}{M} \tag{21}$$

(✓)

Die gesammte Zugspannung ergibt sich nun aus der obrigen Gleichung:

$$T=m\left(g-\frac{2mg}{M}\right) \tag{22}$$

(✓) 1,5/3

Aufgabe 3b Für $M\to\infty$ ergeben sich aus den Formeln, dass $\alpha\to 0$, $a\to 0$, $T\to mg$

✓ 1,5/1,5

Aufgabe 4a Aus Symmetriegründen folgt, dass in der Mitte die meiste Zugkraft wirken muss. Man kann von der Mitte aus die Kräfte aufintegrieren und somit die komplette Zugkraft erhalten:

$$T=F=\int \omega r^2 \mathrm{d}m \tag{23}$$

Jetzt ist es praktisch, wenn man dm durch dr ersetzt. Mit der Substitutionsvorschrift

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}=\frac{m}{l} \tag{24}$$

die obige Gleichung in ein handliches Koordinatensystem umwandelt:

$$T=\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{m}{l}\omega^2 r\mathrm{d}r=\frac{m\omega^2 l^2}{8l} \tag{25}$$

$$\frac{T}{A}=\frac{m\omega^2 l}{8A} \tag{26}$$

✓ 1,25/1,25

Aufgabe 4b Aus der Definition von Querschnittsfläche und Dichte folgt:

$$\frac{m}{A}=l\rho=2\,\mathrm{m}\cdot 7{,}8\,\mathrm{g/cm^3}=15600\,\mathrm{kg/m^2} \tag{27}$$

Nun kann man in (26) einsetzen und erhält:

$$\frac{T}{A} = \frac{l\rho\omega^2 l}{8} \tag{28}$$

Setzt man nun die Werte ein, erhält man für ω:

$$900\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{mm}^2} = 9 \cdot 10^8\,{}^{\mathrm{N}}/_{\mathrm{m}^2} = \frac{15600\,{}^{\mathrm{kg}}/_{\mathrm{m}^2}\,\omega^2\,2\,\mathrm{m}}{8} \tag{29}$$

$$\omega = 480\,{}^{1}/_{\mathrm{s}} = 76\,\mathrm{Hz} \tag{30}$$

✓ 1,5/1,5

Aufgabe 4c Man integriert wieder über:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \tag{31}$$

Dies kann wieder substituiert werden:

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}r = \left[\frac{1mr^3}{3l}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{ml^2}{12} \tag{32}$$

✓ 1,5/1,5

Aufgabe 4d Die kinetische Rotationsenergie ist durch $E = \frac{1}{2}I\omega^2$ gegeben. Die Energie, die für eine Anhebung um h benötigt wird ist $E = mgh$.

Setzt man die entsprechende Geschwindigkeit ein, erhält man:

$$mgh = \frac{1}{2}\frac{1}{12}ml^2\omega^2 \tag{33}$$

$$h = \frac{\omega^2 l^2}{24g} = 3840\,\mathrm{m} \tag{34}$$

✓ 1,75/1,75