Vorbemerkung

Dies ist ein korrigierter Übungszettel aus dem Modul math341.

Dieser Übungszettel wurde von einem Tutor korrigiert. *Dies bedeutet jedoch nicht, dass es sich um eine Musterlösung handelt. Weder ich, noch der Tutor implizieren, dass dieses Dokument keine Fehler enthält.*

Alle Übungszettel zu diesem Modul können auf http://martin-ueding.de/de/university/bsc_physics/math341/ gefunden werden.

[disclaimer]

math340 – Übung 14

Gruppe 16 – Malte Lackmann

Martin Ueding — Paul Manz — Lino Lemmer

mu@uni-bonn.de

2013-01-29

Aufgabe	14.1	14.3	14.4	14.5	$\sum$
Punkte	1,5 / 4	4 / 4	3 / 4	2 / 2	12,5 / 14

14.1. Hauptzweig des Logarithmus

14.1a. $z_0 = 1$

Wir entwickeln um $z_0 = 1$. Die Ableitungen sind, wie im Reellen:

$$f^{(n)} = (-1)^{n+1} x^{-n} \cdot (n-1)! \quad f \qquad (n \geq 1)$$

Die Reihe ist mit $f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}$:

$$f(z) = \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\cancel{n!}\; n} (z - z_0)^n \qquad \log(1) = 0$$

0,5/2

Diese Reihe konvergiert sogar absolut für alle z. f Die Reihe konvergiert nur für $|z-1| < 1$. In $z = 0$ ist log gar nicht definiert

14.1b. $z_0 = -1 + \mathrm{i}$

Wir benutzen die gleichen Ableitungen, werten allerdings an $z_0 = -1 + \mathrm{i}$ aus.

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \mathrm{i}}\right)^n \frac{1}{n!} (z - z_0)^n$$

Auch diese Reihe konvergiert absolut für alle z, also auch in $-1 - \epsilon\mathrm{i}$. f s.o.

Da $-1 + \mathrm{i}$ und $-1 - \epsilon\mathrm{i}$ allerdings auf zwei verschiedenen Ebenen der Riemann'schen Fläche liegen, weichen die Funktionswerte um $2\pi\mathrm{i}$ voneinander ab. (✓) Verstehe ich nicht.

1/2

14.3. holomorphe Funktionen

14.3b. zweite Funktion

Eigentlich sollte man a und nicht b machen.

Wir setzen $z = \frac{1}{n}$ und erhalten:

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z^2} - 1} = \frac{z^2}{1 - z^2}$$

Diese Funktion ist an den Stellen $z = \pm 1$ nicht definiert. Auf $B_1(0)$ gibt es allerdings keine weiteren Definitionslücken. Die Funktion ist auf dieser Kreisscheibe holomorph. Wenn wir $n > 1$ voraussetzen, gilt die Identität $f(1/n) = \left(n^2 - 1\right)^{-1}$ für alle n. ✓

2/2

14.3d. vierte Funktion

Die Funktion $f \equiv 0$ erfüllt die Bedingung $\left|f(1/n)\right| \leq e^{-n}$, wenn auch nicht besonders kreativ. ✓

2/2

14.4. Entwicklung in Laurentreihen

14.4a. erste Funktion

Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(z) = \frac{3}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-2}$$

Wir beginnen mit dem ersten Summanden und schreiben diesen als geometrische Reihe:

$$-\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^k$$ ✓

Dabei müssen wir als Einschränkung $|z| > 1$ einfügen, da die Reihe sonst nicht konvergiert. ✓

Den zweiten Summanden schreiben wir in eine normale Taylorreihe, da wir hier eine Konvergenzobergrenze erhalten möchten. Nur so können wir den Konvergenzring zwischen 1 und 2 erreichen. Würden wir hier ebenfalls in eine geometrische Reihe entwickeln[1], hätten wir im Konvergenzring $B_{2,\infty}(0)$ entwickelt.

Wir entwickeln in eine Reihe:

$$g(z) = \frac{1}{z-2} \implies g^{(n)}(z) = (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n} \implies g^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \implies g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n$$ ✓

1

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k$$

Diese Reihe konvergiert für alle $|z| < 2$.

Beide Summen schreiben wir zusammen:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \quad ✓$$

14.4b. zweite Funktion

Es soll

$$f(z)=\frac{4z-z^2}{\left(z^2-4\right)(z+1)}$$

entwickelt werden. Wir führen eine Partialbruchzerlegung durch:

$$f(z)=-\cancel{\frac{3}{2}}\frac{1}{z+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{z-2}+\frac{5}{3}\frac{1}{z+1} \qquad (✓)$$
$$-3$$

Zu den einzelnen Summanden bilden wir die Maclaurinreihe:

1.
$$-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{1}{z+2}=\cancel{-\frac{3}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n \qquad |z|<2$$
$$-\frac{3}{2}$$

2.
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad |z|<2$$

3.
$$\frac{5}{3}\frac{1}{z+1}=+\frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad |z|<1$$

Achtung beim Ausrechnen geom. Reihen:

$$\frac{1}{z-2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Zu jedem der Summanden bilden wir außerdem noch eine Art geometrische Reihe:

1.
$$-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{1}{z+2}=-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=-\frac{3}{\cancel{2}}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n=-\frac{3}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n \qquad |z|>2$$

2.
$$\frac{1}{3}\frac{1}{z-2}=\frac{1}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\frac{1}{6}\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n \qquad |z|>2$$

3.

$$-\frac{5}{3}\frac{1}{z+1} = -\frac{5}{3}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$ $|z|>1$

Nun müssen wir diese Teile geschickt kombinieren, je nach gewünschtem Konvergenzring. Wir beginnen mit $B_{1,2}(0)$. Dazu brauchen wir die geometrische Reihe des Termes mit Polstelle bei $|z|=1$ und die Maclaurinreihen der Terme mit Polstelle bei $|z|=2$. Zusammen also:

$$f(z)\restriction B_{1,2}(0) = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

$\frac{3}{2}$ stimmt $\quad \cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

Für $B_{2,\infty}(0)$ benötigen wir nur die geometrischen Reihen von allen Summanden, da nur diese für beliebig große Summanden gelten:

$$f(z)\restriction B_{2,\infty}(0) = 3\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{5}{3}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^n z^n$$

Und für $B_{0,1}(0)$ brauchen wir nur die Maclaurinreihen, da diese nur für kleine $|z|$ gültig sind:

$\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$f(z)\restriction B_{0,1}(0) = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^n + \frac{5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

14.5. Konvergenzbereiche

Sorry für die etwas unsaubere Korrektur. Das Fazit ist: Stimmt alles bis auf ziemlich viele Rechenfehler... 3/4

14.5a. erste Reihe

Wir zerlegen die Reihe in positiven und negativen Teil:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{z^k}{|k|!}$$

Der Konvergenzradius R der ersten Reihe ist ∞, da es die Exponentialfunktion ist:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

Für den zweiten Summanden ist der Konvergenzradius $r=0$:

$$r = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

Da wir nur innerhalb des Kreisrings sicher Konvergenz haben, muss $0<|z|<\infty$ gelten.

14.5b. zweite Reihe

Die Koeffizienten der zweiten Reihe sind:

$$a_k = 2\,\mathrm{sech}(ak)$$

Wir bestimmen die Konvergenzradien:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mathrm{e}^{ak} + \mathrm{e}^{-ak}} \geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\mathrm{e}^{ak}} = \mathrm{e}^{a}$$

Analog für r. Wir haben $r \geq \mathrm{e}^{a}$ als auch $R \leq \mathrm{e}^{-a}$. Die z, für die die Reihe konvergiert, sind also:

$$\mathrm{e}^{a} < |z| < \mathrm{e}^{-a}$$

✓ 2/2